Digitized by Google

5. 4. 30

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

# INTRODUCTIO
## IN ANALYSIN
# INFINITORUM.

AUCTORE


## LEONHARDO EULERO,

*Profeſſore Regio* Berolinensi, *& Academiæ Imperialis Scientiarum* Petropolitanæ *Socio.*


EDITIO NOVA.

TOMUS SECUNDUS.




*LUGDUNI,*

Apud Bernuset, Delamolliere, Falque & Soc.

1797.



Digitized by Google

Digitized by Google

# INTRODUCTIO
## IN
# ANALYSIN INFINITORUM.
## LIBER SECUNDUS,
*CONTINENS*

Theoriam Linearum curvarum, una cum appendice de Superficiebus.



Digitized by Google

# LIBER SECUNDUS.

## CAPUT PRIMUM.

### DE LINEIS CURVIS IN GENERE.

1. Quoniam quantitas variabilis eſt magnitudo in genere conſiderata omnes quantitates determinatas in ſe complectens, in Geometria hujuſmodi quantitas variabilis convenientiſſime repræſentabitur per lineam rectam indefinitam $RS$. Cum enim in linea indefinita magnitudinem quamcunque determinatam abſcindere liceat, ea pariter ac quantitas variabilis eandem quantitatis ideam menti offert. Primum igitur, in linea indefinita $RS$ punctum aſſumi debet $A$, unde magnitudines determinatæ abſcindendæ initium ſumere cenſeantur; ſicque portio determinata $AP$ repræſentabit valorem determinatum in quantitate variabili comprehenſum. Tab. I. Fig. 1.

2. Sit igitur $x$ quantitas variabilis, quæ per rectam inde-



Digitized by Google

LIB. II. finitam $RS$ repræſentetur, atque manifeſtum eſt omnes valores determinatos ipſius $x$, qui quidem ſint reales, per portiones in recta $RS$ abſcindendas repræſentari poſſe. Silicet, ſi punctum $P$ in ipſo puncto $A$ capiatur, intervallum $AP$ evaneſcens exhibebit valorem $x = 0$; quo magis autem punctum $P$ ab $A$ removetur, eo major valor determinatus ipſius $x$ intervallo $AP$ repræſentabitur.

Vocantur autem hæc intervalla $AP$, ABSCISSÆ.

Atque ideo Abſciſſæ exhibent variabilis $x$ valores determinatos.

3. Quia vero recta $RS$ indefinita utrinque ab $A$ in infinitum excurrit, utrinque etiam omnes ipſius $x$ valores abſcindi poterunt. Quod ſi autem valores affirmativos ipſius $x$ ab $A$ dextrorſum progrediendo abſcindamus, intervalla $Ap$ ſiniſtrorſum abſciſſa valores ipſius $x$ negativos exhibebunt. Cum enim, quo longius punctum $P$ dextrorſum ab $A$ diſtat, intervallum $AP$ eo majorem valorem ipſius $x$ ſignificet; ſic viciſſim, quo magis punctum $P$ ſiniſtrorſum removetur, eo magis valor ipſius $x$ diminuetur; atque, ſi $P$ ad $A$ perveniat, omnino fiet $x = 0$. Hanc ob rem ſi $P$ ulterius ſiniſtrorſum removeatur, valores ipſius $x$ nihilo minores, hoc eſt negativi, denotabuntur, atque ideo intervalla $Ap$ ab $A$ ſiniſtrorſum abſciſſa valores ipſius $x$ negativos exhibebunt, ſi quidem intervalla $AP$ dextrorſum ſumta valores affirmativos præbere ſenſeantur. Arbitrarium autem eſt utra plaga ad valores affirmativos ipſius $x$ deſignandos eligatur: ſemper enim oppoſita valores ipſius $x$ negativos continebit.

TAB. I. Fig. 2. 4. Cum igitur linea recta indefinita quantitatem variabilem $x$ exhibeat, videamus quomodo Functio ipſius $x$ quæcunque quam-commodiſſime geometrice repræſentari queat. Sit $y$ Functio quæcunque ipſius $x$; quæ ergo valorem deteminatum induat, ſi pro $x$ valor determinatus ſubſtituatur. Sumta recta indefinita $RAS$ ad valores ipſius $x$ denotandos, cuilibet valori ipſius $x$ determinato $AP$ normaliter applicetur recta $PM$ valori ipſius $y$ reſpondenti æqualis. Scilicet, ſi

valor ipſius $y$ prodeat affirmativus, is ſupra rectam $RS$ conſtituatur, ſin autem valor ipſius $y$ negativus oriatur, is infra rectam $RS$ normaliter applicetur. Sumtis enim valoribus ipſius $y$ affirmativis ſupra rectam $RS$, evaneſcentes in ipſam $RS$ & negativi infra eam cadent.

5. Figura ergo ejuſmodi Functionem ipſius $x$, pro $y$ exhibet, quæ, poſito $x = 0$, induat valorem affirmativum $= AB$, ſin capiatur $x = AP$, fit $y = PM$; ſi $x = AD$, fit $y = 0$, &, ſi ſumatur $x = AP$, Functio $y$ accipit valorem negativum, ideoque normaliter applicata $PM$ infra rectam $RS$ cadit. Simili modo valores ipſius $y$, qui valoribus negativis ipſius $x$ reſpondent, repræſentantur per applicatas ſupra $RS$ poſitas, ſi ſint affirmativi; contra autem infra rectam $RS$ conſtitui debent, ut $pm$: ſin autem, pro quopiam ipſius $x$ valore, ut $-x = AE$, fiat $y = 0$, tum ibi longitudo Applicatæ evaneſcit.

6. Si igitur hoc modo pro omnibus valoribus determinatis ipſius $x$ definiantur valores ipſius $y$ reſpondentes, ad ſingula rectæ $RS$ puncta $P$ conſtituentur rectæ normaliter applicatæ $PM$ valores Functionis $y$ exprimentes, harumque Applicatarum $PM$ alteri termini $P$ in rectam $RS$ incident, alteri vero $M$ vel ſupra $RS$ erunt poſiti, ſi valores ipſius $y$ fuerint affirmativi; vel infra, ſi ſint negativi; vel etiam in ipſam rectam $RS$ incident, ſi evaneſcant, uti evenit in punctis $D$ & $E$. Singulæ ergo Applicatarum extremitates $M$ repræſentabunt lineam quampiam, ſive rectam, ſive curvam; quæ igitur hoc modo per Functionem $y$ determinabitur. Quare, quælibet ipſius $x$ Functio, hoc modo ad Geometriam tranſlata, certam determinabit lineam, ſive rectam ſive curvam, cujus natura a natura Functionis $y$ pendebit.

7. Hoc autem modo linea curva, quæ ex Functione $y$ reſultat, perfecte cognoſcitur; quoniam omnia ejus puncta ex Functione $y$ determinantur; in ſingulis enim punctis $P$ conſtat longitudo Applicatæ normalis $PM$, cujus extremum punctum $M$ in linea curva ſit poſitum, ſicque omnia lineæ curvæ puncta inveniuntur. Quomodocunque autem linea curva fuerit com-

Digitized by Google

parata, ex ejus ſingulis punctis rectæ normales ad rectam $RS$ duci poſſunt, ſicque obtineatur intervalla $AP$, quæ valores variabilis $x$ exhibent, & longitudines Applicatarum $PM$, quæ valores Functionis $y$ repræſentant. Hinc nullum curvæ extabit punctum, quod non hac ratione per Functionem $y$ definiatur.

8. Quanquam complures lineæ curvæ per motum puncti continuum mechanice deſcribi poſſunt, quo pacto tota linea curva ſimul oculis offertur, tamen hanc linearum curvarum ex Functionibus originem hic potiſſimum contemplabimur, tanquam magis analyticam latiuſque patentem, atque ad calculum magis accommodatam. Quælibet ergo Functio ipſius $x$ ſuppeditabit lineam quandam, ſive rectam ſive curvam, unde viciſſim lineas curvas ad Functiones revocare licebit. Cujuſque ergo lineæ curvæ natura exprimetur per ejuſmodi Functionem ipſius $x$, quæ, dum intervalla $AP$ ad quæ perpendicula $MP$ ex ſingulis curvæ punctis $M$ in rectam $RS$ demittuntur, per variabilem $x$ indicantur, exhibeat ſemper veram iſtius Applicatæ $MP$ longitudinem.

9. Ex hac linearum curvarum idea ſtatim ſequitur earum diviſio in *continuas* & *diſcontinuas* ſeu *mixtas*. Linea ſcilicet curva *continua* ita eſt comparata, ut ejus natura per unam ipſius $x$ Functionem definitam exprimatur. Quod ſi autem linea curva ita ſit comparata, ut variæ ejus portiones $BM$, $MD$, $DM$ &c., per varias ipſius $x$ Functiones exprimantur; ita ut, poſtquam ex una Functione portio $BM$ fuerit definita, tum ex alia Functione portio $MD$ deſcribatur; hujuſmodi lineas curvas *diſcontinuas* ſeu *mixtas* & *irregulares* appellamus: propterea quod non ſecundum unam legem conſtantem formantur, atque ex portionibus variarum curvarum continuarum componuntur.

10. De curvis autem continuis in Geometria potiſſimum eſt ſermo, atque infra oſtendetur, quæ curvæ motu uniformi ſecundum regulam quandam conſtantem mechanice deſcribuntur, eaſdem quoque per unicam Functionem exprimi, atque ideo

eſſe continuas. Sit igitur $mEBMDM$ linea curva continua, cujus naturam contineat Functio quæpiam ipſius $x$, quæ ſit $y$; atque manifeſtum eſt, ſumtis valoribus ipſius $x$ determinatis in recta $RS$, a puncto fixo $A$, tum valores ipſius $y$ reſpondentes præbere Applicatarum normalium $PM$ longitudinem.

11. In hac linearum curvarum explicatione nomina quædam ſunt tenenda, quorum frequentiſſimus uſus exiſtit in doctrina de Lineis curvis.

Primum igitur recta $RS$, in qua valores ipſius $x$ abſcinduntur, vocatur Axis, ſeu linea recta *directrix.*

Punctum $A$, a quo valores ipſius $x$ menſurantur, dicitur *initium Abſciſſarum.*

Portiones autem Axis $AP$, quibus determinati ipſius $x$ valores indicantur, vocari ſolent Abscissæ.

Et perpendiculares $PM$, ex terminis *Abſciſſarum* $M$ ad lineam curvam pertingentes, nomen Applicatarum obtinuerunt.

Vocantur autem hoc caſu Applicatæ *normales* ſeu *orthogonales*, quia cum Axe angulum rectum conſtituunt; cum enim ſimili modo Applicatæ $PM$ ad angulum obliquum cum Axe conſtitui poſſint, hoc caſu Applicatæ *obliquangulæ* vocantur; hic vero conſtanter naturam curvarum per Applicatas orthogonales explicabimus, niſi expreſſis verbis contrarium indicetur.

12. Si igitur Abſciſſa quæcunque $AP$ inſigniatur per variabilem $x$, ut ſit $AP=x$, tum Functio $y$ indicabit magnitudinem Applicatæ $PM$, eritque $PM=y$. Natura igitur lineæ curvæ, ſi quidem fuerit continua, exprimetur per qualitatem Functionis $y$, ſeu per rationem, qua $y$ ex $x$ & quantitatibus conſtantibus componitur. In Axe igitur $RS$ erit portio $AS$ locus Abſciſſarum affirmativarum; portio $AR$ locus Abſciſſarum negativarum; tum vero ſupra Axem $RS$ exſiſtet regio Applicatarum affirmativarum, infra autem erit regio Applicatarum negativarum.

13. Cum igitur ex qualibet Functione ipſius $x$ naſcatur linea curva continua, hæc etiam ex illa Functione cognoſci

atque deſcribi poterit. Tribuantur enim primo ipſi $x$ valores affirmativi a o ad $\infty$ uſque progrediendo, ac pro ſingulis quærantur valores Functionis $y$ reſpondentes, quæ per Applicatas, ſive ſurſum ſive deorſum porrectas, repræſententur, prout valores habeant ſive affirmativos ſive negativos; ſicque orietur portio curvæ $BMM$. Deinde ſimili modo ipſi $x$ tribuantur omnes valores negativi ab o ad $-\infty$ progrediendo, & valores ipſius $y$ reſpondentes determinabunt curvæ portionem $BEm$, ſicque univerſa linea curva in Functione contenta exhibebitur.

14. Quia eſt $y$ Functio ipſius $x$; vel $y$ æquabitur Functioni ipſius $x$ explicitæ, vel dabitur æquatio inter $x$ & $y$, qua $y$ per $x$ definitur: utroque caſu habebitur æquatio, quæ dicitur naturam curvæ exprimere. Hanc ob rem natura cujuſque lineæ curvæ per æquationem inter duas variabiles $x$ & $y$ exhibetur; quarum altera $x$ denotet Abſciſſas in Axe a dato principio $A$ ſumtas; altera vero $y$ Applicatas ad Axem normales. Abſciſſæ autem & Applicatæ conjunctim conſideratæ appellantur COORDINATÆ *orthogonales*: hincque natura lineæ curvæ per æquationem inter Coordinatas orthogonales definiri dicitur, ſi habeatur æquatio determinans, qualis Functio ipſius $x$ ſit $y$.

15. Cum igitur linearum curvarum cognitio ad Functiones perducatur, tot varia linearum curvarum exiſtent genera, quot ſupra Functionum eſſe vidimus. Ad modum ergo Functionum lineæ curvæ aptiſſime dividuntur in *algebraïcas* & *tranſcendentes*. Linea curva ſcilicet erit algebraïca, ſi Applicata $y$ fuerit Functio algebraïca ipſius Abſciſſæ $x$; ſeu, cum natura lineæ curvæ exprimitur per æquationem algebraïcam inter Coordinatas $x$ & $y$, hujus generis lineæ curvæ quoque *geometricæ* vocari ſolent. Linea curva autem *tranſcendens* eſt, cujus natura exprimitur per æquationem tranſcendentem inter $x$ & $y$; ſeu, ex qua fit $y$ Functio tranſcendens ipſius $x$. Hæcque eſt præcipua linearum curvarum continuarum diviſio, qua eæ ſunt vel *algebraïcæ* vel *tranſcendentes*.

16. Ad lineam autem curvam ex data Functione ipſius $x$, qua Applicata $y$ exprimitur deſcribendam, natura Functionis,

an

an ſit uniformis, an multiformis probe eſt attendenda. Ponamus primo $y$ eſſe Functionem uniformem ipſius $x$, ſeu eſſe $y = P$, denotante $P$ Functionem quamcunque uniformem ipſius $x$; & quia ipſi $x$ valorem quemvis determinatum tribuendo, Applicata $y$ unum quoque valorem determinatum recipit, unicuique Abſciſſæ una reſpondebit Applicata & hanc ob rem Curva ita erit comparata, ut, ſi in quovis Axis $RS$ puncto $P$ ducatur ad ipſum normalis $PM$, ea ſemper Curvam ſecet, idque in unico puncto $M$. Singulis ergo Axis punctis ſingula reſpondebunt Curvæ puncta; &, cum Axis utrinque in infinitum extendatur, Curva quoque utrinque in infinitum excurret. Seu Curva ex tali Functione orta continuo tractu utrinque cum Axe in infinitum porrigetur, cujuſmodi tractum figura 2 exhibet, ubi linea curva $mEBMDM$ utrinque ſine ulla interruptione in infinitum excurrit. CAP. I.

17. Sit $y$ Functio biformis ipſius $x$, ſeu denotantibus litteris $P$ & $Q$ Functiones ipſius $x$ uniformes, ſit $yy = 2Py - Q$ ut ſit $y = P \pm \surd(PP - Q)$. Unicuique igitur Abſciſſæ $x$ reſpondebit duplex Applicata $y$, utraque exiſtente vel reali vel imaginaria: prius ſi $PP > Q$, poſterius ſi $PP < Q$. Quamdiu ergo uterque valor ipſius $y$ erit realis, Abſciſſæ $AP$ duplex conveniet Applicata $PM$, $PM$, ſeu recta ad Axem in $P$ normalis Curvam in duobus punctis $M$ & $M$ trajiciet. Ubi autem fit $PP < Q$, ibi Abſciſſæ nulla convenit Applicata; ſeu normalis ad Axem his in locis Curvæ nuſquam occurret, ut fit in $p$. At cum ante eſſet $PP > Q$, fieri non poterit $PP < Q$, niſi tranſeundo per caſum $PP = Q$, qui erit limes inter Applicatas reales & imaginarias. Ubi ergo Applicatæ reales deſinunt, uti in $C$ vel $G$, ibi fit $y = P \pm 0$, ſeu ambæ Applicatæ inter ſe fiunt æquales, ibique Curva curſum inflectendo regredietur. TAB. I. *Fig.* 3.

18. Secundum Figuram apparet, dum Abſciſſa negativa $-x$ contineatur intra limites $AC$ & $AE$, Applicatam $y$ fieri imaginariam, eſſeque $PP < Q$: ultra $E$ vero ſiniſtrorſum progrediendo Applicatæ iterum fiunt reales, quod fieri nequit niſi



Digitized by Google

Lib. II. in $E$ ſit $PP = Q$, ideoque ambæ Applicatæ conveniant. Tum rurſus Abſciſſis $AP$ duplex Applicata $Pm$, $Pm$ reſpondet, donec ad $G$ perveniatur, ubi hæ duæ Applicatæ conveniunt, atque ultra $G$ denuo fiunt imaginariæ. Hujuſmodi ergo linea curva conſtare poterit ex partibus a ſe invicem disjunctis ut $MBDBM$ & $Fm\,Hm$ duabus pluribuſve: nihilo vero minus hæ partes conjunctim conſideratæ unam Curvam continuam ſeu regularem conſtituere ſunt cenſendæ, quia hæ ſingulæ partes ex una eademque Functione naſcuntur. Iſtæ ergo Curvæ hanc habent proprietatem, ut, ſi in ſingulis Axis punctis normaliter producantur rectæ $MM$, eæ ſemper Curvam vel nuſquam vel in duobus punctis trajiciant; niſi forte duo interſectionis puncta in unum coaleſcant, quod fit ſi Applicatæ per puncta $D$, $F$, $H$, vel $I$ ducantur.

19. Si $y$ fuerit Functio triformis ipſius $x$, ſeu ſi $y$ per hujuſmodi æquationem $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ definiatur, exiſtentibus $P$, $Q$ & $R$ Functionibus uniformibus ipſius $x$, tum pro quovis valore ipſius $x$ Applicata $y$ tres habebit valores, qui, vel omnes erunt reales, vel unicus tantum, reliquis duobus exiſtentibus imaginariis. Hinc omnes Applicatæ Curvam ſecabunt, vel in tribus punctis, vel tantum in unico, niſi ubi duo vel etiam tria interſectionis puncta in unum coleſcunt. Cum igitur unicuique Abſciſſæ ſaltem una Applicata realis conveniat, neceſſe eſt ut Curva utrinque cum Axe in infinitum excurrat. Curva ergo vel uno continuo tractu conſtabit, ut in *Figura quarta*; vel duabus partibus a ſe junctis, ut in *Figura quinta*; vel pluribus, quæ tamen omnes conjunctæ unam eandemque Curvam continuam conſtituunt.

Tab. I. Fig. 4. & 5.

20. Si $y$ fuerit Functio quadriformis ipſius $x$, ſeu ſi $y$ per hujuſmodi æquationem $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$ definiatur, tum unicuique valori ipſius $x$, vel quatuor reſpondebunt valores reales ipſius $y$, vel duo tantum, vel omnino nullus. Hinc, in Curva ex hujuſmodi Functione quadriformi orta ſingulæ Applicatæ Curvam ſecabunt vel in quatuor punctis,

Digitized by Google

vel in duobus tantum, vel nuſquam, quos ſingulos caſus *Figura Sexta* exhibet; notari autem debent loca *I* & *o*, ubi duo interſectionis puncta in unum coaleſcunt. Hanc ob rem tam dextrorſum quam ſiniſtrorſum vel nulli Curvæ rami in infinitum excurrunt, vel duo vel etiam quatuor. Priori caſu, quo ex neutra parte nulli rami in infinitum extenduntur, Curva undique erit clauſa, ut figura indicat, ſpatiumque definitum includit. Hinc ergo jam concludi poteſt indoles linearum curvarum, quæ formantur ex Functionibus multiformibus quotcunque ſignificatuum.

21. Si ſcilicet fuerit $y$ Functio multiformis, ſeu determinetur per æquationem, in qua $n$ ſit exponens maximæ poteſtatis ipſius $y$, tum numerus valorum realium ipſius $y$ erit vel $n$, vel $n - 2$, vel $n - 4$, vel $n - 6$, &c., in totidem ergo punctis quælibet Applicata Curvam interſecabit. Ita, ſi una Applicata Curvam continuam ſecet in $m$ punctis, omnes aliæ Applicatæ Curvam ſecabunt in tot punctis, quorum numerus ſemper numero pari differat ab $m$; nuſquam ergo Curva ab Applicata ſecari poterit in $m + 1$, vel $m - 1$, vel $m \pm 3$ &c., punctis. Hoc eſt, ſi numerus interſectionum unius Applicatæ fuerit par vel impar, omnes quoque Applicatæ reliquæ Curvam ſecabunt in punctorum numero vel pari vel impari.

22. Si igitur una Applicata Curvam ſecet in punctorum numero impari, tum fieri nequit, ut ulla alia Applicata Curvam nuſquam interſecet: Curva ergo utrinque ad minimum unum habebit ramum in infinitum excurrentem, &, ſi ex alterutra parte plures rami in infinitum extendantur, eorum numerus debet eſſe impar, quia numerus interſectionum unius cujuſque Applicatæ non poteſt eſſe par; ſi ergo rami utrinque in infinitum excurrentes ſimul numerentur, eorum numerus conſtanter erit par. Hoc idem locum habet ſi Applicatæ Curvam interſecent in punctorum numero pari, tum enim ex utraque parte ſeorſim vel nullus, vel duo, vel quatuor &c., rami in infinitum excurrent, unde ergo quoque omnium ramorum in in-



Digitized by Google

 finitum excurrentium numerus erit par. Jam igitur adepti ſumus aliquot inſignes proprietates Curvarum continuarum & regularium, unde eas a Curvis diſcontinuis & irregularibus diſcernere licet.

---

## CAPUT II.

### *De Coordinatarum permutatione.*

Tab. I. *Fig.* 2.

23. Quemadmodum ex æquatione inter Coordinatas $x$ & $y$, quarum illa Abſciſſam, hæc Applicatam denotat; data Curva deſcribitur ſuper Axe $RS$, initio Abſciſſarum $A$ alicubi pro lubitu aſſumto, ita viciſſim, ſi jam deſcripta fuerit linea curva ejus natura exprimi poterit per æquationem inter Coordinatas. Hic autem quamvis Curva ſit data, duæ tamen res in arbitrio noſtro relinquuntur; poſitio ſcilicet Axis $RS$, & principium Abſciſſarum $A$. Quæ cum infinitis modis variari queant, etiam pro eadem linea Curva innumerabiles æquationes exhiberi poterunt, hancque ob cauſam ex æquationum diverſitate non ſemper ad diverſitatem linearum curvarum, quæ illis æquationibus exprimantur concludere licet, etiamſi diverſæ Curvæ perpetuo diverſas præbeant æquationes.

24. Cum igitur, variato tam Axe quam Abſciſſarum initio, innumerabiles oriantur æquationes ejuſdem Curvæ naturam exprimentes, hæ omnes ita inter ſe erunt comparatæ, ut ex data æquatione una reliquæ omnes inveniri queant. Ex data enim æquatione inter Coordinatas ipſa linea curva determinatur, hac autem cognita, ſi quæcunque linea recta pro Axe, & in ea punctum pro Abſciſſarum principio aſſumatur, æquatio inter Coordinatas orthogonales definietur. Hoc igitur Capite methodum trademus, cujus ope, ſi æquatio pro Curva fuerit data, ad alium Axem quemcunque, & Abſciſſarum initium quodcunque æquatio inter Coordinatas inveniri queat, quæ ejuſdem Curvæ naturam exprimat. Atque hoc modo reperientur

omnes omnino æquationes, quæ ejuſdem Curvæ naturam comprehendant, ſicque facilius diverſitas linearum curvarum ex æquationum diverſitate dijudicari poterit. CAP. II.

25. Sit igitur data æquatio quæcunque inter $x$ & $y$, ex qua ſumta recta $RS$ pro Axe, & puncto $A$ pro initio Abſciſſarum, ita ut $x$ denotet Abſciſſam $AP$ & $y$ Applicatam $PM$, producatur linea curva $CBM$, cujus ergo natura per æquationem datam exprimitur. Retineamus jam primum eumdem Axem $RS$, at aliud punctum in eo $D$ pro initio Abſciſſarum aſſumamus, ita ut nunc puncto curvæ $M$ reſpondeat Abſciſſa $DP$, quæ ponatur $= t$, Applicata vero $MP$ manebit eadem $= y$, quæ ante: quæramus igitur æquationum inter $t$ & $y$, qua ejuſdem Curvæ $CBM$ natura exprimatur. Ponatur intervallum $AD = f$, quod ab $A$ ſiniſtrorſum in regionem Abſciſſarum negativarum cadat, eritque $DP = t = f + x$, ideoque $x = t - f$. Quare ſi in æquatione inter $x$ & $y$ data ubique loco $x$ ſubſtituatur $t - f$, prodibit æquatio inter $t$ & $y$, quæ eamdem lineam curvam $CBM$ exhibebit. Cum igitur magnitudo $AD = f$ ab arbitrio noſtro pendeat, jam innumerabiles diverſas adepti ſumus æquationes, quæ omnes eandem lineam curvam exprimant. TAB. II. Fig. 7.

26. Si Curva alicubi Axem $RS$ trajiciat, uti in $C$, tum ſumto hoc puncto $C$ pro initio Abſciſſarum, ejuſmodi obtinebitur æquatio, quæ, poſita Abſciſſa $CP = 0$, ſimul Applicatam $PM$ evaneſcentem ſit præbitura; ſi quidem unica tantum Applicata puncto Axis $C$ reſpondeat. Interſectio autem $C$, ſi ulla pluresve dentur, invenietur ex æquatione primum propoſita inter $x$ & $y$, ponendo $y = 0$, & ex æquatione quærendo valorem vel valores ipſius $x$. Ubi enim Curva in Axem incidit, ibi fit $y = 0$, facto ergo viciſſim $y = 0$, omnes illæ Abſciſſæ ſeu valores ipſius $x$ elicientur, ubi Curva in Axem incidit.

27. Initium ergo Abſciſſarum, retento Axe, mutabitur ſi Abſciſſa $x$ data quantitate ſive augeatur ſive minuatur; hoc eſt, ſi loco $x$ ponatur $t - f$ ubi $f$ erit quantitas affirmativa, ſi

Digitized by Google

LIB. II. novum Abſciſſarum initium $D$ ſiniſtrorſum ab $A$ fuerit remotum; erit vero $f$ quantitas negativa, ſi punctum $D$ ad dextram ab $A$ fuerit ſitum.

TAB. II. Fig. 8. Ponamus nunc deſcripta Curva $LBM$ ex data æquatione inter $AP = x$ & $PM = y$, alium aſſumi Axem $rs$ priori parallelum in eoque punctum $D$ pro Abſciſſarum initio: cadat autem iſte Axis in regionem Applicatarum negativarum, ſitque ejus a priori Axe diſtantia $AF = g$, atque ponatur intervallum $DF = AG = f$. Sit igitur in hoc novo Axe Abſciſſa puncto Curvæ $M$ reſpondens, $DQ = t$, & Applicata $QM = u$, eritque $t = DF + FQ = f + x$ & $u = PM + PQ = g + y$, unde fit $x = t - f$ & $y = u - g$. Quare ſi in æquatione inter $x$ & $y$ data ſubſtituatur ubique $t - f$ loco $x$, & $u - g$ loco $y$, orietur æquatio inter $t$ & $u$, qua ejuſdem lineæ curvæ natura exprimetur.

28. Cum igitur magnitudines $f$ & $g$ ab arbitrio noſtro pendeant, hincque infinitis modis definiri queant, infinities plures diverſæ formari poterunt æquationes quam priori caſu, quæ tamen omnes ad eamdem lineam curvam pertineant. Quod ſi ergo duæ æquationes altera inter $x$ & $y$, & altera inter $t$ & $u$, hoc tantum a ſe invicem diſcrepent, ut altera in alteram transformetur, ſi Coordinatæ unius datis quantitatibus ſive augeantur ſive minuantur, tum ambæ æquationes licet diverſæ tamen eamdem lineam curvam exhibebunt. Hinc igitur facile innumerabiles formabuntur æquationes diverſæ, quæ tamen omnes ejuſdem lineæ curvæ naturam exprimant.

29. Statuatur novus Axis $rs$ normalis ad priorem $RS$, ſecanſque ipſum in principio Abſciſſarum $A$, ita ut pro utroque

TAB. II. Fig. 9. Axe idem ſit Abſciſſarum initium $A$. Quoniam pro Axe $RS$ datur æquatio ad Curvam $LM$ inter Abſciſſam $AP = x$, & Applicatam $PM = y$, ducatur ex Curvæ puncto $M$ in novum Axem $rs$ perpendicularis $MQ$ & vocetur Abſciſſa nova $AQ = t$, Applicata nova $QM = u$, eritque ob $APMQ$ parallelogrammum rectangulum, $t = y$ & $u = x$. Hinc, ex æquatione inter $x$ & $y$ data, formabitur æquatio inter $t$ & $u$,

Digitized by Google

ponendo $u$ loco $x$ & $t$ loco $y$. Prior ergo Abſciſſa $x$ nunc abit in Applicatam $QM = u$, & prior Applicata $y$ nunc abit in Abſciſſam $AQ = t$; pro iſto itaque novo Axe nulla alia æquationi variatio inducitur niſi, quod Coordinatæ $x$ & $y$ inter ſe commuttentur: hancque ob rationem Abſciſſa & Applicata ſimul Coordinatæ vocari ſolent, nullo facto diſcrimine, utra pro Abſciſſa Applicatave accipiatur. Propoſita enim æquatione inter duas Coordinatas $x$ & $y$, eadem Curva emergit, ſive $x$ ſive $y$ ad Abſciſſam indicandam accipiatur.

30. Poſuimus hic novi Axis $rs$ portionem $As$ exhibere Abſciſſas affirmativas, atque ad dextram Axis $rs$ ſtatui regionem Applicatarum affirmativarum, quæ cum ab arbitrio pendeant, pro lubitu immutari poterunt. Scilicet ſi Axis portio $Ar$ Abſciſſis affirmativis deſtinetur, erit utique $AQ = -t$, ſicque in æquatione inter $x$ & $y$ loco $y$ poni debet $-t$. Deinde ſi ad dextram Axis $rs$ regio Applicatarum negativarum ſtatuatur, fiet $QM = -u$, atque pro $x$ ſcribi debebit $-u$. Atque hinc intelligitur naturam lineæ curvæ non mutari etiamſi in æquatione inter Coordinatas vel alterutra vel utraque negativa ſtatuatur; id quod in omnibus æquationis tranſmutationibus eſt tenendum.

31. Secet nunc novus Axis $rs$ priorem $RS$ ſub angulo quocunque $SAs$; fiatque interſectio in ipſo Abſciſſarum initio $A$, quod punctum in utroque Axe initium Abſciſſarum conſtituat. Data ergo ſit pro Axe $RS$ æquatio quæcunque pro Curva $LM$ inter Abſciſſam $AP = x$ & Applicatam $PM = y$, ex qua reperiri debeat æquatio ad eamdem Curvam pro novo Axe $rs$, ſeu ex Curvæ puncto $M$ ad novum Axem demiſſo perpendiculo $MQ$, inter Abſciſſam novam $AQ = t$, & Applicatam $MQ = u$. Sit angulus $SAs = q$; ejus Sinus $= m$, & Coſinus $= n$, ſumta unitate pro Sinu toto ut ſit $mm + nn = 1$. Ex $P$ ducantur normales $Pp$ & $Pq$ in novas Coordinatas, eritque ob $Ap = x$, $Pp = x.\,ſin.\,q$; $Ap = x.\,coſ.\,q$, deinde quia angulus $PMQ = PAQ = q$, erit ob $PM = y$, $Pq = Qp = y.\,ſin.\,q$; $Mq = y.\,coſ.\,q$. Ex his ergo fiet $AQ = t =$ TAB. II. Fig. 10.

 $Ap - Qp = x.coſ.q - y.ſin.q$, & $QM = u = Mq + Pp = x.ſin.q + y.coſ.q$.

32. Cum autem ſit $ſin.q = m$, $coſ.q = n$, erit $t = nx - my$ & $u = mx + ny$, hinc fiet $nt + mu = nnx + mmx = x$, & $nu - mt = nny + mmy = y$. Æquatio ergo quæſita inter $t$ & $u$ reperietur, ſi in æquatione inter $x$ & $y$, propoſita ubique loco $x$ ſcribatur $mu + nt$ & $nu - mt$ loco $y$, ſi quidem Axis portio $As$ contineat Abſciſſas affirmativas, & Applicatæ affirmativæ in regionem $QM$ cadant. Poſuimus hic etiam angulum $SAs$ in regionem Applicatarum negativarum cadere; quod ſi autem $As$ ſupra $AS$ caderet; in calculo angulus $SAs = q$ negativus, ac propterea ejus Sinus $m$ negative accipi deberet.

TAB. III. Fig. 11. 33. Tribuatur nunc novo Axi $rs$ poſitio quæcunque, in eoque ſumatur punctum quodvis $D$ pro Abſciſſarum initio. Sit $RS$ Axis prior, pro quo habetur æquatio inter Abſciſſam $AP = x$ & Applicatam $PM = y$, qua natura Curvæ $LM$ exprimitur; unde æquatio inter alias Coordinatas $t$ & $u$ ad novum Axem $rs$ relatas exhiberi debet. Demiſſo ſcilicet ex quovis Curvæ puncto $M$ in novum Axem $rs$ perpendiculo $MQ$ vocetur Abſciſſa $DQ = t$, & Applicata $QM = u$. Inter quas ut æquatio inveniatur, ex novo Abſciſſarum initio $D$ in Axem priorem $RS$ ducatur perpendicularis $DG$, ac ponatur $AG = f$ & $DG = g$, tum per $D$ priori Axi $RS$ producatur parallela $DO$, cui prior Applicata $PM$ producta occurrat in $O$, eritque $MO = y + g$, & $DO = GP = x + f$. Denique ponatur angulus $ODQ = q$, cujus Sinus ſit $= m$, & Coſinus $= n$, poſito ſemper Sinu toto $= 1$, ut ſit $mm + nn + = 1$.

34. Jam ex puncto $O$ ducantur tam in novum Axem $DQ$ quam in Applicatam $MQ$ normales $Op$ & $Oq$; atque, ob angulum $OMQ = ODQ$ & $DO = x + f$, ac $MO = y + g$, erit $Op = Qq = (x + f).ſin.q = mx + mf$ & $Dp = (x + f).coſ.q = nx + nf$. Porroque $Oq = Qp = (y + g).ſin.q = my + mg$ & $Mq = (y + g).coſ.q = ny + ng$. Ex

Ex his igitur colligetur $DQ = t = nx + nf - my - mg$ & $QM = u = mx + mf + ny + ng$, ſicque ex $x$ & $y$ definientur novæ Coordinatæ $t$ & $u$. Hinc vero erit $nt + mu = x + f$ & $nu - mt = y + g$, ob $mm + nn = 1$, quocirca habebitur $x = mu + nt - f$, & $y = nu - mt - g$, qui ergo valores ſi in æquatione inter $x$ & $y$ data loco $x$ & $y$ ſubſtituantur, prodibit æquatio inter $t$ & $u$, qua ejuſdem Curvæ $LM$ natura exprimetur. 

35. Quoniam nullus excogitari poteſt Axis $rs$, qui quidem in eodem plano cum Curva ſit ſitus, qui non in hac poſtrema determinatione contineatur; pro eadem quoque Curva $LM$ nulla exiſtet æquatio inter Coordinatas orthogonales, quæ non in hac æquatione inter $t$ & $u$ inventa comprehendatur. Cum igitur quantitates $f$ & $g$ cum angulo $q$, unde $m$ & $n$ pendent, infinitis modis variari queant, omnes æquationes, quæ in æquatione inter $t$ & $u$ hoc modo inventa continentur, ejuſdem lineæ curvæ naturam expriment. Hanc ob rem iſta æquatio inter $t$ & $u$ vocari ſolet æquatio generalis pro Curva $LM$, quoniam ea in ſe complectitur omnes omnino æquationes, quæ ad eandem lineam curvam pertinent.

36. Supra jam innuimus difficile eſſe ex diverſitate aliquot æquationum inter Coordinatas judicare, utrum eæ ad eandem lineam curvam, an ad diverſas referantur: nunc igitur patet via omnes hujuſmodi quæſtiones dijudicandi. Sint enim duæ propoſitæ æquationes, altera inter $x$ & $y$, & altera inter $t$ & $u$, ponatur in illa $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, ubi $m$ & $n$ ita a ſe invicem pendent ut ſit $mm + nn = 1$; quo facto diſpiciendum erit utrum altera illa æquatio inter $t$ & $u$ in hac, quæ modo eſt eruta, contineatur, ſeu an quantitates $f$, $g$ cum $m$ & $n$ ita definiri poſſint, ut ipſa altera æquatio inter $t$ & $u$ reſultet. Quod ſi fieri poſſit, ambæ æquationes eandem lineam curvam exprimient, ſin ſecus diverſas.

LIB. II.

## EXEMPLUM.

Hoc modo patebit has duas æquationes.

$$yy - ax = 0$$

&

$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0,$$

ad eandem lineam curvam referri, etiamſi ipſæ plurimum diſcrepent: ſi enim in priori æquatione ponamus $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, ea transformabitur in hanc

$$\begin{array}{l} nnuu - 2mntu + mmtt - 2ngu + 2mgt + gg \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - mau - nat + af \end{array} = 0.$$

Num igitur in hac altera illa æquatio contineatur, multiplicemus illam per $nn$ hanc vero per $16$, ut termini primi utrinque congruant, habebiturque

$$16nnuu - 24nntu + 9nntt - 55nnau + 10nnat = 0$$

&

$$\begin{array}{l} 16nnuu - 32mntu + 16m^2tt - 32ngu + 32mgt + 16gg \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 16mau - 16nat + 16af \end{array} = 0.$$

Nunc inquiratur quot termini, arbitrariis $f$, $g$, $m$ & $n$ determinandis, æquales reddi queant, ac primo quidem habebimus $24nn = 32mn$ & $9nn = 16mm$, quarum utraque dat $3n = 4m$, & ob $mm = 1 - nn$, erit quoque $25nn = 16$, hinc $n = \frac{4}{5}$ & $m = \frac{3}{5}$, ſicque jam tres termini conveniunt. Quartus & quintus dant $55nna = 32ng + 16ma$ & $10nna = 32mg - 16na$, unde an idem pro $g$ valor eruatur videndum eſt, dat vero prior $g = \frac{55na}{32} - \frac{ma}{2n} = \frac{11a}{8} - \frac{3a}{8} = a$, & poſterior $g = \frac{5nna}{16m} + \frac{na}{2m} = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = a$, uterque ergo valor congruit, & jam quinque termini conveniunt. Nil aliud

Digitized by Google

ergo ſupereſt, niſi ut ſit $gg + af = 0$, quod, cum $f$ nondum ſit determinatum, nil habet difficultatis, fiet enim $f = -a$. Oſtenſum ergo eſt, has duas æquationes propoſitas eandem lineam curvam exhibere.

37. Quanquam autem fieri poteſt, ut æquationes admodum diverſæ eandem lineam curvam repræſentent, tamen ſæpe numero ex æquationum diverſitate tuto linearum curvarum diverſitas concluditur. Evenit hoc ſi æquationes propoſitæ ad diverſos ordines pertineant, ſeu in quibus maximæ dimenſiones, quas Coordinatæ $x$ & $y$ ſeu $t$ & $u$ conſtituunt, ſunt diverſæ, hoc enim caſu lineæ curvæ, quæ per has æquationes indicantur, certo erunt diverſæ. Cujuſcunque enim ordinis fuerit æquatio inter $x$ & $y$, ſi ponatur $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, reſultabit æquatio inter $t$ & $u$ ejuſdem ordinis; quare, ſi altera æquatio inter $t$ & $u$ propoſita ad alium ordinem pertineat, Curvam quoque diverſam indicabit.

38. Niſi igitur duæ æquationes, altera inter $x$ & $y$ altera inter $t$ & $u$, ad eundem ordinem pertineant, ſtatim concludendum eſt lineas curvas, quæ allis æquationibus exprimuntur, eſſe diverſas. Dubitatio ergo tantum locum habere poteſt, ſi ambæ æquationes fuerint ejuſdem ordinis, hiſque ſolum caſibus inveſtigatione ante tradita opus erit, quæ autem cum ſatis operoſa evadat, ſi æquationes ad altiorem quempiam ordinem pertineant, infra expeditiores regulæ tradentur, ex quibus ſtatim varietas Curvarum dignoſci poterit.

39. Quæ hic de invenienda æquatione generali pro quavis linea curva ſunt præcepta, eadem ad lineam rectam accommodari poſſunt. Sit enim, loco lineæ curvæ, propoſita linea recta $LM$, quam Axi $RS$ parallelam ſtatuamus: ubicunque ergo initium Abſciſſarum $A$ capiatur, erit ſemper Applicata $PM$ conſtantis magnitudinis, ſeu $y = a$; quæ ergo eſt æquatio pro linea recta Axi parallela. Quæramus hinc æquationem generalem lineæ rectæ ad Axem quemcunque $rs$ relatam; poſito ergo $DG = g$, anguli $ODs$ Sinu $= m$, Coſinu $= n$, & vocata Abſciſſa $DQ = t$, & Applicata $MQ = u$, ob $y =$ TAB. II. Fig. 12.

LIB. II. $nu - mt - g$, erit $nu - mt - g - a = 0$, quæ eſt æquatio generalis pro linea recta. Multiplicetur ea per conſtantem $k$ & ponatur $nk = \alpha$, $mk = -\zeta$ & $(g + a)\ k = -b$, eritque æquatio $\alpha u + \zeta t + b = 0$ pro linea recta, quæ cum ſit æquatio primi ordinis inter $t$ & $u$ generalis, patet omnem æquationem primi ordinis inter duas Coordinatas, nullam lineam curvam, ſed rectam lineam exhibere.

TAB. III. Fig. 13. 40. Quoties ergo inter Coordinatas $x$ & $y$ talis prodit æquatio $\alpha x + \zeta y - a = 0$; toties ea præbet lineam rectam, cujus poſitio reſpectu Axis $RS$ ita determinabitur. Ponatur primo $y = 0$, ſicque in Axe reperitur punctum $C$, ubi hæc recta Axem trajicit, fit enim $AC = \frac{a}{\alpha}$; tum ponatur $x = 0$, fietque $y = \frac{a}{\zeta}$ qui eſt valor Applicatæ $AB$ in initio Abſciſſarum. Cum ergo habeantur duo puncta, $B$ & $C$, in recta quæſita, ea erit definita, ideoque æquationi propoſitæ ſatisfaciet recta $LM$. Ponatur enim Abſciſſa quæcunque $AP = x$ & reſpondens Applicata $MP = y$, erit ob ſimilitudinem triangulorum $CPM$, $CAB$, $CP : PM = CA : AB$, hoc eſt $\frac{a}{\alpha} - x : y = \frac{a}{\alpha} : \frac{a}{\zeta}$, unde fit $\frac{ay}{\alpha} = \frac{aa}{\alpha\zeta} - \frac{ax}{\zeta}$, ſeu $\alpha x + \zeta y = a$, quæ eſt ipſa æquatio propoſita.

41. Si fuerit vel $\alpha$ vel $\zeta = 0$, tum iſta conſtructio uſum habere non poterit, at vero iſti caſus per ſe ſunt facillimi. Sit enim $\alpha = 0$, & $y = a$, unde patet lineam ſatisfacientem eſſe rectam Axi parallelam ab eoque intervallo $= a$ remotam, ſin ſit $a = 0$, ſeu $y = 0$, linea ſatisfaciens in Axem incidet. Quod ſi vero fuerit $\zeta = 0$, & $x = a$, perſpicuum eſt lineam ſatisfacientem eſſe rectam ad Axem normalem, quæ ab initio Abſciſſarum intervallo $= a$ diſtet. Hoc ſcilicet caſu omnibus Applicatis unica Abſciſſa reſpondet, ita ut Abſciſſa quantitas variabilis eſſe deſinat. Ex his igitur luculenter perſpicitur, quemadmodum lineæ rectæ per æquationes inter Coordinatas orthogonales deſignari queant.

Digitized by Google

42. Aſſumſimus hactenus Coordinatas, quibus natura Curvæ definitur, inter ſe eſſe normales, ſimili vero modo etiam ex data æquatione linea curva definietur, ſi Applicatæ ad Axem ſub angulo quocunque inclinentur. Viciſſim ergo natura Curvæ exprimi poterit per æquationem inter duas Coordinatas obliquangulas, atque hujuſmodi æquationes quoque variatis cum Axe tum principio Abſciſſarum innumerabilibus modis variari poſſunt, manente Curva eadem. Sicque pro quavis obliquitate Coordinatarum æquatio generalis ad Curvam exhiberi poteſt. Quod ſi vero etiam hæc obliquitas alia atque alia ſtatuatur, multo latius patens eruetur æquatio pro Curva, quam æquationem generaliſſimam appellabimus, quoniam naturam Curvæ non ſolum exprimit per æquationem ad quemvis Axem & quodcunque initium Abſciſſarum relatam, ſed etiam pro quacunque Coordinatarum obliquitate. Hæcque adeo æquatio generaliſſima abibit in æquationem generalem, ſi angulus, quem Coordinatæ inter ſe conſtituunt, rectus ſtatuatur. CAP. II.

43. Data ſit pro Curva $LM$ æquatio inter Coordinatas rectangulas, nempe inter $AP = x$ & $PM = y$, & quæratur, retento Axe $RS$ & initio Abſciſſarum $A$ eodem, æquatio inter Coordinatas, quæ datum angulum comprehendant qui ſit $= \varphi$. Ex puncto ergo $M$ ad Axem $RS$ ducatur recta $MQ$ ad angulum illum datum $MQA$, cujus Sinus ſit $= \mu$ & Coſinus $= \nu$. Erit ergo $AQ$ nova Abſciſſa, & $MQ$ nova Applicata: poſito ergo $AQ = t$ & $QM = u$, erit in triangulo rectangulo $PMQ$, $\frac{y}{u} = \mu$ & $\frac{PQ}{u} = \nu = \frac{t - x}{u}$. Quocirca fiet $u = \frac{y}{\mu}$ & $t = \nu u + x = \frac{\nu y}{\mu} + x$, & viciſſim $y = \mu u$ & $x = t - \nu u$. Conſequenter ſi in æquatione inter $x$ & $y$ propoſita ponatur $x = t - \nu u$ & $y = \mu u$ prodibit æquatio inter Coordinatas obliquangulas $t$ & $u$, quæ inter ſe datum angulum $\varphi$ conſtituant. TAB. III. Fig. 14.

44. Quod ſi autem data fuerit pro Curva $LM$ æquatio inter Coordinatas obliquangulas $AQ$ & $QM$; ex ea viciſſim

LIB. II. reperietur æquatio pro eadem Curva inter Coordinatas orthogonales $AP$ & $PM$. Sit enim $\varphi$ angulus, quem Applicatæ $MQ$ cum Abſciſſis $AQ$ conſtituunt, cujus Sinus $= \mu$ & Coſinus $= \nu$, dataque ſit æquatio inter $AQ = t$ & $QM = u$. Ex $M$ ducatur ad Axem Applicata normalis $MP$, &, poſita Abſciſſa $AP = x$ & Applicata $MP = y$., quia eſt $u = \frac{y}{\mu}$ & $t = \frac{\nu y}{\mu} + x$, ſi hi valores in æquatione inter $t$ & $u$ propoſita ſubſtituantur, prodibit æquatio inter $x$ & $y$, quæ quærebatur.

TAB. IV. Fig. 15. 45. Data nunc æquatione inter Coordinatas orthogonales $AP = x$; & $PM = y$ pro Curva $LM$, hoc modo æquatio generaliſſima pro eadem linea curva inveniri poterit. Sumatur recta quæcunque $rs$ pro Axe, & in eo punctum $D$ pro Abſciſſarum initio; Applicatæ vero $MT$ ad hunc Axem ductæ faciant angulum $DTM = \varphi$, cujus Sinus ſit $= \mu$ & Coſinus $= \nu$; erit ergo nova Abſciſſa $DT$ & Applicata $TM$, inter quas æquatio quæritur. Ex $D$ in Axem priorem $RS$ ducatur perpendicularis $DG$, & ſit $AG = f$; $DG = g$, ductaque $DO$ Axi $RS$ parallela ſit anguli $ODs$ Sinus $= m$, Coſinus $= n$. Ducatur, ut ante fecimus, ex $M$ ad Axem novum $rs$ normalis $MQ$, & ponatur $DQ = t$; $QM = u$; Coordinatæ autem obliquangulæ, ſint $DT = r$; $TM = s$; Erit ergo primo $t = r - \nu\, s$ & $u = \mu\, s$ (43); deinde vero eſt $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$ (36). Hinc fiet $x = nr - (n\nu - m\mu)s - f$ & $y = -mr(\mu n + \nu m)s - g$, ubi eſt $n\nu - m\mu$ Coſinus anguli $AVM$, quem novæ Applicatæ cum Axe priori $RS$ conſtituunt, & $\mu n + \nu m$ eſt Sinus hujus anguli $AVM$. Quod ſi ergo in æquatione inter $x$ & $y$ loco $x$ & $y$ illi valores inventi ſubſtituantur, prodibit æquatio inter Coordinatas obliquangulas $r$ & $s$, quæ erit æquatio generaliſſima pro Curva $LM$.

46. Quoniam in valoribus, qui loco $x$ & $y$ ſubſtituuntur, novarum variabilium $r$ & $s$ unica ineſt dimenſio, manifeſtum eſt æquationem generaliſſimam ejuſdem eſſe ordinis, cujus erat

æquatio propoſita inter $x$ & $y$. Quomodocunque ergo æquatio ad eandem Curvam transformetur, mutatis utcunque tam Axe, & Abſciſſarum initio, quam inclinatione mutua Coordinatarum, tamen perpetuo æquatio ejuſdem erit ordinis. Quanquam ergo æquatio inter Coordinatas, ſive orthogonales ſive obliquangulas, infinitis modis variari poteſt, ut ad eandem Curvam pertineat, tamen neque ad ordinem altiorem evehi, neque ad inferiorem deprimi poterit. Atque hanc ob cauſam æquationes diverſi ordinis, utcunque alias fuerint affines, tamen ſemper Curvas diverſas, exhibebunt. 

## CAPUT III.

### *De Linearum curvarum algebraïcarum in ordines diviſione.*

47. Cum Linearum curvarum pariter ac Functionum varietas ſit infinita, earum cognitio nullo modo acquiri poterit, niſi infinita multitudo in certas claſſes digeratur, hocque modo mens in earum ſcrutatione dirigatur atque adjuvetur. Diviſimus jam quidem Lineas curvas in *algebraïcas* & *tranſcendentes*, verum utraque claſſis, ob infinitam Curvarum varietatem, ulteriori ſubdiviſione opus habet. Hic autem tantum Curvas *algebraïcas* ſpectamus, quas quemadmodum commodiſſime in claſſes diſtribui conveniat, diſpiciamus. Charateres igitur primum definiendi ſunt, quibus claſſium varietates determinentur, ita ut quæ Curvæ eodem charactere ſint præditæ, eæ ad eandem; quæ contra, ad diverſas claſſes referantur.

48. Characteres ergo iſti varias claſſes diſtinguentes aliunde, niſi ex Functionibus ſeu æquationibus, quibus Linearum curvarum natura continetur, peti nequeunt; cum, quia alia via ad Curvarum cognitionem perveniendi adhuc non patet; tum, quia nulla alia, quæ quidem datur, omnes Curvas algebraïcas

Digitized by Google

LIB. II. ſub ſe complectitur. Functiones vero & æquationes inter binas Coordinatas pluribus modis in diverſa genera diſtribui poſſunt, uti fecimus in libro ſuperiori. Ac primo quidem Functionum multiformitas ſe offert, quæ ad Linearum curvarum in varias claſſes diſtributionem præ aliis apta videtur; unde hujuſmodi diviſio orietur, ut eæ Lineæ curvæ, quæ ex Functionibus uniformibus oriuntur, ad genus primum, quæ ex biformibus ad ſecundum, quæ ex triformibus ad tertium referantur & ita porro.

49. Quamvis autem hæc diviſio videatur naturalis, tamen, ſi diligentius perpendatur, naturæ Linearum curvarum, earumque indoli minime conformis deprehendetur. Multiformitas enim Functionum ab Axis poſitione, quæ eſt arbitraria, potiſſimum pendet, ita ut, ſi pro uno Axe Applicata fuerit Functio uniformis Abſciſſæ, eadem, alio aſſumto Axe, Functio multiformis eſſe queat; hoc ergo modo eadem Linea curva in diverſis generibus occurreret, quod eſt contra inſtitutum. Sic enim Linea curva hac æquatione $a^3 y = aaxx - x^4$ expreſſa pertineret ad genus primum, quia Applicata $y$ eſt Functio uniformis ipſius $x$; permutatis vero Coordinatis, ſeu Axe ſumto ad priorem normali, eadem Curva exprimitur æquatione $y^4 - aayy + a^3 x = 0$, ſicque ad genus quartum pertineret. Hanc igitur ob cauſam multiformitas Functionum ad characterem, quo Lineæ curvæ in claſſes diſtribuantur, conſtituendum admitti nequit.

50. Æque parum ſimplicitas æquationum naturam Linearum curvarum exprimentium, ratione numeri terminorum characterem diſtinctionis conſtituere poterit. Si enim eæ Curvæ ad genus primum referantur quarum æquatio conſtet duobus terminis, ut $y^m = \alpha x^n$, ad ſecundum quarum æquatio contineat tres terminos ut $\alpha y^m + \beta y^p x^q + \gamma x^n = 0$, & ita porro, manifeſtum eſt eandem Lineam curvam in pluribus generibus occurrere. Per exemplum enim §. 36. ſubjunctum Linea curva æquatione

æquatione $yy - ax = 0$ contenta ſimul ad genus primum & quartum referri deberet, quia, mutato Axe, etiam hac æquatione CAP. III.

$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0,$$

exprimitur. Deberet vero etiam, aliter aſſumto Axe & Abſciſſarum initio, ſimul ad genus ſecundum, tertium, & quintum pertinere; ex quo iſta diviſio adhiberi omnino non poteſt.

51. Hæc incommoda evitabuntur ſi æquationum, quibus relatio inter Coordinatas exprimitur, ordines ad Curvarum claſſes conſtituendas adhibeantur. Cum enim pro eadem Linea curva, utcunque tam Axis & principium Abſciſſarum quam inclinatio Coordinatarum varietur; æquatio ejuſdem ſemper ordinis maneat; eadem Linea curva non ad diverſas claſſes referetur. Charactere ergo in numero dimenſionum, quas Coordinatæ, ſive orthogonales ſive obliquangulæ, in æquatione complent, conſtituto, neque Axis neque principii Abſciſſarum mutatio, neque inclinationis Coordinatarum variatio, claſſium conſtitutionem perturbabit. Atque eadem Curva, ſive æquatio inter Coordinatas ſpecialis quæque ſive generalis ſive etiam generaliſſima ſpectetur, ad eandem ſemper claſſem annumerabitur. Quam ob rem character diſtinctionis Linearum curvarum convenientiſſime ab ordine æquationum petitur.

52. Quoniam igitur hæc diverſa æquationum genera, quæ ex dimenſionum numero conſtituuntur, ordines vocavimus, diverſa quoque Linearum curvarum genera, quæ hinc oriuntur, ordinum nomine appellabimus. Cum ergo æquatio primi ordinis generalis ſit

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y$$

omnes Lineas curvas, quæ ſumtis $x$ & $y$ pro Coordinatis, ſive orthogonalibus ſive obliquangulis, ex hac æquatione proficiſcuntur, ad ordinem primum referemus. Supra autem vidimus in hac æquatione tantum Lineam rectam contineri, & hanc ob

LIB. II. rem primus ordo ſolam Lineam rectam in ſe complectitur, quæ utique inter omnes Lineas eſt ſimpliciſſima. Cum igitur nomen Curvæ huic primo ordini non conveniat, hos ordines non *Linearum curvarum*, ſed vocabulo latiori ſimpliciter *Linearum* vocabimus. Ordo ergo Linearum primus nullam Lineam curvam continet, ſed a ſola Linea recta exhauritur.

53. Perinde autem eſt ſive Coordinatæ ſtatuantur rectangulæ ſive obliquangulæ; quod ſi enim Applicatæ cum Axe faciant angulum $\varphi$, cujus Sinus ſit $\mu$ & Coſinus $\nu$, æquatio ad Coordinatas orthogonales reducetur, ponendo $y = \frac{u}{\mu}$ & $x = \frac{\nu u}{\mu} + t$ (44), unde iſta inter Coordinatas orthogonales $t$ & $u$, æquatio naſcitur

$$o = \alpha + \beta t + \left(\frac{\beta \nu}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu}\right) u,$$

quæ cum non minus late pateat quam prior, utraque enim eſt generalis, manifeſtum eſt ſignificationem æquationis non reſtringi, etiamſi angulus, quem Applicatæ cum Axe faciant, rectus ſtatuatur. Hoc idem eveniet in æquationibus ſequentium ordinum generalibus, quæ non minus late patebunt, etſi Coordinatæ orthogonales ſtatuantur. Cum igitur æquatio generalis cujuſque ordinis per determinationem inclinationis Applicatarum ad Axem nihil de vi ſua perdat, ejus ſignificatum non reſtringemus, ſi Coordinatas orthogonales ſtatuamus. Quæcunque enim Linea curva in æquatione generali cujuſque ordinis continetur, ſumtis Coordinatis obliquangulis, eadem Linea curva in eadem æquatione continebitur, ſi Coordinatæ rectangulæ ſtatuantur.

54. Lineæ porro ſecundi ordinis omnes continebuntur in hac æquatione generali ordinis ſecundi.

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon x y + \zeta y^2$$

Omnes ſcilicet Lineas curvas, quas hæc æquatio, denotanti- CAP. III.
bus litteris $x$ & $y$ Coordinatas orthogonales, in ſe complectitur, ad ordinem Linearum ſecundum numeramus. Sunt igitur hæ Lineæ curvæ ſimpliciſſimæ, quia in ordine primo nulla Linea curva continetur, & hanc ob rem a quibuſdam Lineæ curvæ primi ordinis vocari ſolent. Lineæ vero iſtæ curvæ in hac æquatione contentæ ſub nomine *Sectionum conicarum* vulgo innotuerunt, quia eædem omnes ex ſectione Coni naſcuntur. Diverſæ harum Linearum ſpecies ſunt Circulus, Ellipſis, Parabola & Hyperbola, quas infra ex æquatione generali deducemus.

55. Ad tertium porro Linearum ordinem referuntur omnes Lineæ curvæ, quas ſequens æquatio tertii ordinis generalis ſuppeditat

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \kappa y^3$$

ſumtis $x$ & $y$ pro Coordinatis orthogonalibus, quia conditio obliquitatis Applicatarum ampliorem ſignificatum huic æquationi non inducit, ut jam notavimus. Quia in hac æquatione multo plures, quam in præcedente habentur litteræ conſtantes, quas pro arbitrio definire licet, etiam multo major ſpecierum diverſarum numerus in hoc ordine continetur, quarum enumerationem exhibuit NEWTONUS.

56. Ad quartum Linearum ordinem pertinent omnes Lineæ curvæ; quas hæc æquatio generalis quarti ordinis exhibet

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta xy^2 + \iota xy^2 + \kappa x^3$$
$$+ \lambda x^4 + \mu xy^3 + \nu x^2 y^2 + \xi xy^3 + o y^4,$$

ſumtis $x$ & $y$ pro Coordinatis orthogonalibus, quia obliquitas Applicatarum æquationi majorem generalitatem non inducit. Occurrunt ergo in hac æquatione quindecim quantitates conſtantes, pro arbitrio definiendæ, unde multo major ſpecierum diverſarum varietas in hoc ordine occurrit, quam in præcedente. Lineæ iſtæ quarti ordinis vocari etiam ſolent Lineæ

D 2

LIB. II. curvæ tertii ordinis, quia Linearum ordo ſecundus pro Linearum curvarum ordine primo reputatur; ſimilique modo Lineæ tertii ordinis conveniunt cum Lineis curvis ſecundi ordinis.

57. Ex his jam intelligitur, quænam Lineæ curvæ ad ordinem quintum, ſextum, ſeptimum & ſequentes pertineant. Æquatio autem generalis omnes Lineas quinti ordinis in ſe complectens, quia ad æquationem generalem quarti ordinis inſuper accedunt termini,

$$x^5;\ x^4y;\ x^3y^2;\ x^2y^3;\ xy^4;\ y^5$$

conſtabit omnino terminis viginti & uno, & æquatio generalis omnes Lineas ſexti ordinis continens habebit viginti & octo terminos, & ita porro ſecundum numeros trigonales. Scilicet æquatio generalis pro Lineis ordinis $n$ continebit $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}$ terminos, totidemque in ea inerunt litteræ conſtantes, quas pro arbitrio definire licet.

58. Neque vero quælibet litterarum conſtantium diverſa determinatio diverſas Lineas curvas producit. Vidimus enim in præcedente Capite pro eadem Linea curva, mutatis Axe & Abſciſſarum initio, infinitas exhiberi poſſe æquationes diverſas; unde ex diverſitate æquationum ad eundem ordinem pertinentium non ſequitur Curvarum iis æquationibus indicatarum diverſitas. Quam ob rem in enumeratione generum ac ſpecierum ad eundem ordinem pertinentium, quæ ex æquatione generali deducitur, admodum cautum eſſe opportet, ne eadem Linea curva ad duas pluresve ſpecies referatur.

59. Cum igitur ex ordine æquationis, quæ inter Coordinatas datur, Lineæ curvæ ordo cognoſcatur, propoſita quacunque æquatione algebraïca inter Coordinatas $x$ & $y$, ſtatim conſtabit, ad quemnam ordinem Linea curva illa æquatione indicata ſit referenda. Primum Scilicet æquatio, ſi ſit irrationalis, ab irrationalitate liberari, tumque, ſi fractiones ſuperfuerint, ab his purgari debebit, quo facto maximus dimenſionum

numerus, quem variabiles $x$ & $y$ in ea conſtituunt, ordinem, ad quem Linea curva pertinet, indicabit. Sic Linea curva, quam hæc æquatio $yy - ax = 0$ dat, erit ordinis ſecundi: Linea curva autem in hac æquatione $yy = x\surd(aa - xx)$ (quæ ab irrationalitate liberata fit ordinis quarti) contenta erit ordinis quarti. Et Linea curva, quam hæc æquatio præbet $y = \frac{a^3 - axx}{aa + xx}$, erit ordinis tertii, quia æquatio a fractionibus liberata fit $aay + xxy = a^3 - axx$, in cujus termino $xxy$ tres ſunt dimenſiones. 

60. In una eademque autem æquatione plures Lineæ curvæ diverſæ contineri poſſunt, prout Applicatæ ad Axem vel normales vel ſub data obliquitate conſtitutæ ponuntur. Sic hæc æquatio $yy = aa - xx$, ſi Coordinatæ ponantur orthogonales, præbet Circulum, ſin autem Coordinatæ obliquangulæ ſtatuantur, tum Curva erit Ellipſis. Omnes tamen iſtæ Curvæ diverſæ ad eundem ordinem pertinent, quia reductione Coordinatarum obliquangularum ad rectangulas ordo Curvæ non mutatur. Quanquam ergo æquatio generalis pro Lineis curvis cujuſque ordinis ob angulum, quo Applicatæ Axi inſiſtunt, neque latius neque minus late patens redditur, tamen propoſita æquatione ſpeciali Linea curva in ea contenta non determinatur, niſi angulus quem Coordinatæ inter ſe conſtituunt, determinetur.

61. Quo Linea curva ad eum ordinem, quem æquatio indicat, proprie referatur, neceſſe eſt, ut æquatio in Factores rationales reſolvi nequeat. Si enim æquatio duos pluresve habeat Factores, tum duas pluresve involvet æquationes, quarum quælibet peculiarem Lineam curvam generabit, quæ junctim ſumtæ æquationis propoſitæ vim exhaurient. Hujuſmodi ergo æquationes in Factores reſolubiles non unam ſed plures Curvas continuas in ſe complectuntur, quarum quævis peculiari æquatione exprimi queat; & quæ aliter inter ſe non ſunt connexæ; niſi quod earum æquationes in ſe mutuo ſint multiplicatæ. Qui cum ſit nexus ab arbitrio noſtro pendens, ejuſ-

LIB. II. modi Lineæ curvæ non unam continuam Lineam conſtituere cenſeri poſſunt. Tales ergo æquationes, quas ſupra complexas vocavimus, producent Lineas curvas non continuas, attamen ex continuis compoſitas, quas propterea complexas vocabimus.

62. Sic hæc æquatio $yy = ay + xy - ax$, quæ ad Lineam ſecundi ordinis eſſe videtur, ſi ad nihilum reducatur, ut ſit $yy - ay - xy + ax = 0$ conſtabit ex his Factoribus $(y - x)(y - a) = 0$, complectitur ergo has duas æquationes $y - x = 0$ & $y - a = 0$, quarum utraque eſt pro Linea recta, illa ſcilicet cum Axe in initio Abſciſſarum angulum ſemirectum conſtituit, hæc vero Axi ad diſtantiam $= a$ eſt parallela. Duæ ergo iſtæ lineæ rectæ ſimul conſideratæ in æquatione propoſita $yy = ay + xy - ax$ continentur. Simili modo hæc æquatio eſt complexa $y^4 - xy^3 - aaxx - ay^3 + axxy + aaxy = 0$ neque propterea Lineam continuam quarti ordinis exhibet, cum enim Factores ſint $(y - x)(y - a)(yy - ax)$ tres continebit lineas diſcretas, duas ſcilicet rectas & unam Curvam in æquatione $yy - ax = 0$ contentam.

63. Poſſunt ergo pro lubitu Lineæ complexæ quæcunque formari, quæ complectantur duas pluresve Lineas ſive rectas ſive curvas ad arbitrium deſcriptas. Quod ſi enim unius cujuſque Lineæ natura exprimatur per æquationem ad eundem Axem idemque Abſciſſarum initium relatam, hæque æquationes ſingulæ, poſtquam ad cyphram fuerint reductæ, in ſe multiplicentur, prodibit æquatio complexa, in qua omnes Lineæ aſ-

TAB. IV. ſumtæ ſimul continentur. Ita, ſi propoſitus fuerit Circulus *Fig.* 16. centro $C$ & Radio $CA = a$ deſcriptus, ac præterea Linea recta $LN$ per Centrum $C$ tranſiens, æquatio pro quovis Axe exhiberi poterit, quæ Circulum & Lineam rectam, quaſi ambo unam Lineam conſtituerent, conjunctim complectatur.

64. Sumatur diameter $AB$, quæ cum recta $LN$ angulum ſemirectum conſtituat pro Axe, ac ſumto initio Abſciſſarum in $A$, vocatiſque Abſciſſa $AP = x$, & Applicata $PM = y$, erit pro Linea recta $PM = CP = a - x$, & quia punctum

rectæ $M$ in regionem Applicatarum negativarum cadit, erit $y = -a + x$, ſeu $y - x + a = 0$. Pro Circulo autem cum ſit $PM^2 = AP.PB$, ob $BP = 2a - x$, erit $yy = 2ax - xx$ ſeu $yy + xx - 2ax = 0$. Multiplicentur jam hæ duæ æquationes in ſe invicem ac prodibit æquatio tertii ordinis complexa

$$y^3 - y^2x + yxx - x^3 + ayy - 2axy + 3axx - 2aax = 0,$$

quæ tam Circulum quam lineam rectam ſimul in ſe complectetur. Abſciſſæ ſcilicet $AP = x$ reſpondere invenientur tres Applicatæ, binæ Circuli & una rectæ: ſit nimirum $x = \frac{1}{2}a$, fiet $y^3 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{3}{4}aay - \frac{3}{8}a^3 = 0$, unde fit primo $y + \frac{1}{2}a = 0$ tum diviſione per hanc radicem inſtituta erit $yy - \frac{3}{4}aa = 0$, unde tres valores ipſius $y$ erunt.

I. $y = -\frac{1}{2}a$;

II. $y = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$;

III. $y = -\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Quaſi ergo Circulus cum recta $LN$ unum continuum conſtituerit, ita in æquatione repræſentatur.

65. Notato hoc diſcrimine inter Curvas incomplexas & complexas, perſpicuum eſt Lineas ſecundi ordinis vel eſſe Curvas continuas, vel ex duabus Lineis rectis complexas; ſi enim æquatio generalis habet Factores, hi erunt primi ordinis, ideoque Lineas rectas denotabunt. Lineæ autem tertii ordinis erunt vel incomplexæ, vel ex una recta & una Linea ſecundi ordinis complexæ, vel ex tribus Lineis rectis complexæ. Porro Lineæ quarti ordinis erunt vel continuæ ſeu incomplexæ, vel ex una Linea recta & una Linea tertii ordinis complexæ, vel ex dua-

Digitized by Google

LIB. II. bus Lineis ſecundi ordinis complexæ, vel ex Linea ſecundi ordinis una & duabus rectis vel denique ex quatuor Lineis rectis complexæ erunt. Similiter ratio Linearum complexarum ordinis quinti altiorumque ordinum eſt comparata parique modo enumerari poterit. Ex quo patet in quovis Linearum ordine ſimul omnes Lineas ordinum inferiorum comprehendi, neque vero ſimpliciter, ſed quælibet ordinum inferiorum complexa cum Linea vel Lineis rectis, vel cum Lineis ſecundi, tertii, ſequentiumve ordinum, ita tamen, ut ſi numeri ſingulorum ordinum ad quos Lineæ ſimplices pertinent in unam ſummam addantur, prodeat numerus, quo ordo Lineæ complexæ indicatur.

---

## CAPUT IV.

*De Linearum cujuſque ordinis præcipuis proprietatibus.*

66. INTER præcipuas proprietates Linearum cujuſque ordinis primum locum tenet earum concurſus cum Linea recta, ſeu interſectionum multitudo, quas Linea recta cum Lineis cujuſque ordinis facere poteſt. Cum enim Linea primi ordinis, ſeu recta, ab alia Linea recta nonniſi in unico puncto ſecari poſſit, Lineæ curvæ autem in pluribus punctis a Linea recta ſecari queant; merito ergo quæri ſolet in quot punctis Linea curva cujuſque ordinis ſecari poſſit a Linea recta utcunque ducta: ex ipſa enim hac quæſtione natura Linearum curvarum ad varios ordines pertinentium melius cognoſcetur. Reperietur autem Linea ſecundi ordinis a recta in pluribus quam duobus punctis ſecari non poſſe: Linea autem tertii ordinis a recta in pluribus quam tribus punctis ſecari nequit, & ita porro.

67. Supra jam mentionem fecimus modi, quo determinari poteſt in quot punctis Axis cujuſque Curvæ ab ipſa Curva ſecetur. Data enim æquatione inter Abſciſſam $x$ & Applicatam

catam $y$, quia ubi Curvæ punctum in Axem incidit, ibi Applicata $y$ fit $=o$, ponatur in æquatione $y=o$, atque æquatio reſultans, quæ tantum $x$ continebit, monſtrabit valores ipſius $x$, hincque Axis puncta, ubi Curva ipſum ſecabit. Ita in æquatione pro Circulo, quam ſupra invenimus, $yy=2ax-xx$, ſi ponamus $y=o$, fit $o=2ax-xx$, unde duo valores ipſius $x$ reſultant, $x=o$ & $x=2a$, qui indicant Axem $RS$ primo in ipſo Abſciſſarum initio $A$, tum vero in puncto $B$, exiſtente $AB=2a$, a Circulo interſecari. Similique modo in aliis Lineis curvis, poſito in æquatione $y=o$, radices ipſius $x$ indicabunt interſectiones Curvæ cum Axe. TAB. IV. Fig. 16.

68. Quoniam in æquatione generali pro quavis Curva, Linea recta quæcunque vicem Axis ſuſtinet, ſi in æquatione generali ponatur Applicata $y=o$, æquatio remanens indicabit in quot punctis Linea curva a recta quacunque trajiciatur. Prodibit autem æquatio Abſciſſam ſolam $x$, tanquam incognitam, complectens, cujus ſingulæ radices oſtendent interſectiones Curvæ cum Axe. Pendebit ergo interſectionum numerus a maxima ipſius $x$ in æquatione poteſtate, hincque major eſſe non poterit quam exponens ſummæ ipſius $x$ poteſtatis. Tot vero erunt interſectiones, quot exponens maximæ poteſtatis ipſius $x$ continet unitates, ſi omnes radices æquationis fuerint reales, ſin autem aliquot radices fuerint imaginariæ, interſectionum numerus tanto erit minor.

69. Cum igitur pro quovis Linearum ordine æquationes generaliſſimas exhibuerimus; ex iis, modo expoſito, invenire poterimus, in quot punctis Lineæ cujuſque ordinis a recta quacunque ſecari queant. Sumamus ergo æquationem pro Lineis primi ordinis ſeu pro Linea recta generalem, $o=\alpha+\beta x+\gamma y$, ex qua, poſito $y=o$, fit $o=\alpha+\beta x$, quæ æquatio plus una radice habere nequit, unde patet Lineam rectam ab alia recta in unico puncto ſecari. Sin autem fit $\beta=o$, æquatio $o=\alpha$ impoſſibilis indicat hoc caſu Axem a Linea recta nuſquam ſecari, erunt enim ambæ hæ Lineæ rectæ inter ſe parallelæ, uti patet ex æquatione $o=\alpha+\gamma y$, quæ oritur ſi $\beta=o$.



Digitized by Google

LIB. II. 70. Si in æquatione generali pro Lineis ſecundi ordinis

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \epsilon xy + \zeta yy$$

ponamus $y = 0$, prodibit hæc æquatio

$$0 = \alpha + \beta x + \delta xx,$$

quæ æquatio vel duas habet radices reales, vel nullam, vel etiam unicam ſi $\delta = 0$. Hinc Linea ſecundi ordinis a Linea recta vel in duobus punctis ſecabitur, vel in unico, vel nuſquam. Qui caſus omnes ſic in unum comprehendi poſſunt, ut dicamus Lineam ſecundi ordinis a Linea recta pluſquam in duobus punctis ſecari non poſſe.

71. Si in æquatione generali pro Lineis tertii ordinis ponamus $y = 0$, prodibit hujuſmodi æquatio

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3,$$

quæ cum plures tribus radicibus habere nequeat, perſpicuum eſt Lineas tertii ordinis a Linea recta in pluribus quam tribus punctis ſecari non poſſe. Fieri vero poteſt ut Linea tertii ordinis a Linea recta in paucioribus punctis ſecetur, nempe vel in duobus, ſi $\delta = 0$, & æquationis $0 = \alpha + \beta x + \gamma xx$ ambæ radices fuerint reales; vel in unico ſi ſuperioris æquationis duæ radices fuerint imaginariæ, aut ſi ſit & $\delta = 0$ & $\gamma = 0$; vel etiam nuſquam ſi $\delta = 0$ & reliquæ æquationis ambæ radices fuerint imaginariæ, quod idem evenit ſi $\beta$, $\gamma$, & $\delta$ evaneſcant, at $\alpha$ fuerit quantitas non æqualis nihilo.

72. Simili modo colligetur Lineas quarti ordinis a recta in pluribus quam quatuor punctis ſecari non poſſe; hæcque Proprietas ad omnes Linearum ordines ita extendetur, ut Lineæ ordinis $n$ a Linea recta in pluribus quam $n$ punctis ſecari nequeant. Neque vero hinc ſequitur omnem Lineam ordinis $n$ a quavis Linea recta in $n$ punctis ſecari, ſed utique fieri poteſt ut numerus interſectionum ſit minor, imo ſubinde prorſus nullus, uti de Lineis ſecundi & tertii ordinis annotavimus. In

hoc ergo tantum propoſitionis vis eſt poſita, quod interſectionum numerus major nunquam eſſe poſſit, quam exponens ordinis ad quem Linea curva refertur.

73. Ex numero igitur interſectionum, quas Linea recta quæcunque cum data Linea curva facit, ordo ad quem Linea curva pertineat, definiri non poterit. Si enim interſectionum numerus ſit $= n$, non ſequitur Curvam ad ordinem Linearum $n$ pertinere, ſed ad quemvis ordinem ſuperiorem æque referri poterit: quin etiam fieri poteſt ut Curva ne quidem ſit algebraica ſed tranſcendens. Excludendo autem ſemper tuto affirmari poteſt, Lineam curvam, quæ a recta in $n$ punctis ſecetur, ad nullum Linearum ordinem inferiorem pertinere poſſe. Sic, ſi propoſita Linea curva a recta in quatuor punctis ſecetur, certum eſt, eam neque ad ordinem ſecundum, neque tertium referri; utrum autem in ordine quarto, aut ſuperiori quopiam contineatur, an ſit tranſcendens, hinc dijudicari non poteſt.

74. Æquationes generales, quas pro Lineis cujuſque ordinis exhibuimus, plures continent quantitates conſtantes arbitrarias, quibus ſi valores determinati tribuantur, Lineæ curvæ penitus determinabuntur, atque ad datum Axem ita deſcribentur, ut reliquæ Lineæ curvæ omnes, quæ quidem in eadem æquatione generali continebantur, excludantur. Ita, quamvis in æquatione primi ordinis $o = \alpha + \beta x + \gamma y$ ſola Linea recta contineatur; tamen ejus poſito reſpectu Axis infinitis modis variari poteſt, pro diverſis infinitis valoribus quantitatum conſtantium $\alpha, \beta, \gamma$. Quamprimum autem his quantitatibus conſtantibus definiti valores tribuuntur, poſitio Lineæ rectæ determinatur, ut præter hanc nulla alia æquationi ſatisfacere queat.

75. Hæc igitur æquatio $o = \alpha + \beta x + \gamma y$ tres determinationes admittere videri poſſet, ob tres conſtantes arbitrarias $\alpha, \beta, \& \gamma$. Verum ex natura æquationum intelligitur æquationem jam determinari, ſi tantum ratio inter has conſtantes definiatur, ſcilicet ratio binarum ad unam; ex quo iſta æquatio duas tantum admittet determinationes. Si enim $\beta$ & $\gamma$

LIB. II. per $\alpha$ ita determinentur ut ſit $\zeta = -\alpha$ & $\gamma = 2\alpha$, æquatio $0 = \alpha - \alpha x + 2\alpha y$, quia $\alpha$ per diviſionem exit, jam prorſus erit determinata. Similem ob rationem æquatio generalis pro Lineis ſecundi ordinis, quæ ſex continet conſtantes arbitrarias, quinque tantum admittit determinationes, æquatio generalis pro Lineis tertii ordinis novem; & generaliter æquatio generalis pro Lineis ordinis $n$ patietur $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ determinationes.

76. Semper autem iſtæ conſtantes arbitrariæ ita definiri poſſunt ut Linea curva per datum punctum tranſeat, hocque
TAB.IV. modo una determinatio orietur. Sit enim propoſita æquatio
*Fig.* 17. generalis pro quovis ordine Linearum, quæ ita definiri debeat, ut Linea curva per datum punctum $B$ tranſeat. Sumto pro lubitu Axe, in eoque Abſciſſarum initio $A$, demittatur ex puncto $B$ in Axem perpendicularis $Bb$, atque manifeſtum eſt, ſi Curva tranſeat per punctum $B$, tum poſito intervallo $Ab$ pro $x$, perpendicularem $Bb$ præbere valorem Applicatæ $y$. Quare in æquatione generali propoſita, loco $x$ ſubſtituatur $Ab$, & $Bb$ loco $y$, ſicque orietur æquatio, ex qua una quantitatum conſtantium $\alpha, \zeta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c., definiri poterit; quo facto omnes Curvæ, quæ in æquatione generali hoc modo determinata continentur, per punctum datum $B$ tranſibunt.

77. Si Linea curva inſuper per punctum $C$ tranſire debeat, inde ad Axem perpendiculo $Cc$ demiſſo, & in æquatione poſito $x = Ac$ & $y = Cc$, nova orietur æquatio ex qua pariter una ex quantitatibus conſtantibus $\alpha, \zeta, \gamma, \delta$, &c., definietur. Eodem modo intelligitur ſi tria puncta $B, C, D$ præſcribantur, per quæ Linea curva tranſire debeat, inde tres conſtantes definiri; ex quatuor autem punctis $B, C, D, E$ quatuor litteras conſtantes determinationem accipere. Quod ſi ergo tot puncta, per quæ Linea curva tranſeat: proponantur quot determinationes æquatio generalis admittit, tum Linea curva penitus erit determinata, ideoque unica, quæ quidem per omnia puncta propoſita tranſeat.

Digitized by Google

78. Cum igitur æquatio generalis pro Lineis primi ordinis, ſeu pro Linea recta, duas tantum determinationes admittat, propoſitis duobus punctis, per quæ Linea primi ordinis, ſeu recta, tranſeat, Linea recta penitus determinatur; neque per duo puncta data plures quam una Linea recta duci poterunt, quod quidem ex Elementis intelligitur. Sin autem unum tantum proponeretur punctum, tum, ob æquationem nundum determinatam, adhuc infinitæ Lineæ rectæ per idem punctum duci poſſunt. CAP. IV.

79. Æquatio generalis pro Lineis ſecundi ordinis quinque admittit determinationes; unde ſi quinque proponantur puncta, per quæ Linea curva tranſire debeat, Linea ſecundi ordinis penitus determinatur. Hanc ob rem per quinque data puncta unica Linea ſecundi ordinis duci poteſt; ſin autem quatuor tantum vel pauciora puncta proponantur, quia iis æquatio nundum penitus determinatur, innumerabiles Lineæ, quæ omnes ſint ordinis ſecundi per ea duci poterunt. Quod ſi autem quinque illorum punctorum tria in directum jaceant, quia Linea ſecundi ordinis a recta in tribus punctis ſecari nequit, nulla Linea curva continua reperietur, ſed prodibit Linea complexa, duæ nempe Lineæ rectæ, quæ, uti jam monuimus, in æquatione generali ſecundi ordinis continentur.

80. Quia porro æquatio generalis pro Lineis tertii ordinis novem determinationes admittit, per novem puncta pro libitu aſſumta Linea tertii ordinis ſemper duci poterit, atque unica. Sin autem numerus punctorum novenario fuerit minor, tum per ea innumerabiles Lineæ tertii ordinis duci poterunt. Simili modo per quatuordecim puncta data unica Linea quarti ordinis, per viginti puncta unica Linea quinti ordinis duci poterit, & ita porro. Atque in genere Lineæ ordinis $n$ determinabuntur per tot puncta quot hæc formula $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ continet unitates; ita ut, ſi numerus punc-

LIB. II. torum datorum fuerit minor, per ea puncta innumerabiles Lineæ ordinis $n$ duci queant.

81. Niſi ergo plura puncta, quam $\frac{n(n+3)}{2}$, proponantur, ſemper una vel infinitæ Lineæ ordinis $n$ per ea duci poterunt: unica ſcilicet, ſi numerus punctorum datorum fuerit $= \frac{n(n+3)}{2}$, & infinitæ, ſi ſit minor. Nunquam autem, utcunque hæc puncta fuerint diſpoſita, ſolutio evadet impoſſibilis, determinatio enim coëfficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c., nunquam reſolutionem æquationis quadraticæ vel altioris poteſtatis requirit, ſed tota per æquationes ſimplices abſolvetur. Ex quo neque unquam valores imaginarii pro quantitatibus $\alpha, \beta, \gamma$, &c., reperientur, neque valores multiformes; hancque ob cauſam ſemper Linea realis per propoſita puncta tranſiens prodibit; atque unica, ſi quidem tot puncta proponantur, quot determinationes æquatio generalis admittit.

82. Quoniam Axis pro lubitu aſſumi poteſt, iſta coëfficientium determinatio facilior fiet, ſi Axis per unum punctorum datorum ducatur, atque initium Abſciſſarum in ipſo hoc puncto $A$ ſtatuatur; ſic enim poſito $x = 0$ fieri debebit $y = 0$, unde in æquatione generali propoſita

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \&c.,$$

ſtatim fit $\alpha = 0$. Deinde Axis quoque per aliud punctum datorum tranſire poterit, quo pacto numerus quantitatum, quibus poſitio punctorum datorum definitur, minuetur. Denique, loco Applicatarum orthogonalium ejuſmodi obliquangulæ eligi poſſunt, ut Applicata in initio Abſciſſarum ducta pariter per punctum datum tranſeat. Curvæ enim cognitio & conſtructio ex æquatione æque facile deducitur, ſive Applicatæ orthogonales ſive obliquangulæ ſtatuantur.

TAB. IV. Fig. 18. 83. Si quæratur Linea ſecundi ordinis quæ per quinque data puncta $A$, $B$, $C$, $D$, & $E$ tranſeat, ducatur Axis per duo

puncta $A, B$: ſumaturque initium Abſciſſarum in altero puncto $A$. Tum jungatur hoc punctum $A$ cum tertio $C$, ſumaturque angulus $CAB$ pro obliquitate Applicatarum. Quare ex reliquis punctis $D$ & $E$ ad Axem ducantur Applicatæ $Dd$ & $Ee$ illi $AC$ parallelæ. Ponatur $AB = a$; $AC = b$; $Ad = c$; $Dd = d$; $Ae = e$, & $eE = f$; atque ſumta æquatione generali Linearum ſecundi ordinis

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2$$

manifeſtum eſt

| poſito | ——— | fore |
|---|---|---|
| $x = 0$ | | $y = 0$ |
| $x = 0$ | | $y = b$ |
| $x = a$ | | $y = 0$ |
| $x = c$ | | $y = d$ |
| $x = e$ | | $y = f$ |

Hinc orientur ſequentes quinque æquationes

I. $0 = \alpha$

II. $0 = \alpha + \gamma b + \zeta b^2$

III. $0 = \alpha + \beta a + \delta a^2$

IV. $0 = \alpha + \beta c + \gamma d + \delta c^2 + \epsilon cd + \zeta d^2$

V. $0 = \alpha + \beta e + \gamma f + \delta e^2 + \epsilon ef + \zeta f^2$

Erit ergo $\alpha = 0$; $\gamma = -\zeta b$; $\beta = -\delta a$, qui valores in reliquis ſubſtituti dant

$$0 = -\delta ac - \zeta bd + \delta cc + \epsilon cd + \zeta dd$$
$$0 = -\delta ae - \zeta bf + \delta ee + \epsilon ef + \zeta ff$$

multiplicentur ſuperior per $ef$ & inferior per $cd$ & altera ab altera ſubtrahatur, ut eliminetur $\epsilon$, ac proveniet

$$0 = -\delta acef - \zeta bdef + \delta ccef + \zeta ddef$$
$$+ \delta acde + \zeta bcdf - \delta cdee - \zeta cdff$$

ſeu

$$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{bdef - bcdf - ddef + cdff}{acde - acef - cdee + ccef},$$

unde fit

$$\delta = df(be - bc - de + cf)$$
$$\zeta = ce(ad - af - de + cf)$$

hincque omnes coëfficientes determinabuntur.

84. Determinatis autem hoc modo omnibus coëfficientibus æquationis generalis $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 +$ &c., ſuper Axe aſſumto & ſub conſtituta Applicatarum obliquitate, Linea curva deſcribetur per puncta infinita per æquationem invenienda, hæcque Linea curva tranſibit per omnia puncta propoſita. Si æquatio generalis plures admittat determinationes quam fuerint puncta propoſita, tum reliquis pro lubitu aſſumtis Linea curva per ſingula puncta data deſcribetur ope æquationis omnino determinatæ. Tribuuntur autem Abſciſſæ $x$ ſucceſſive plures valores tam affirmativi quam negativi ut 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., & $-1$, $-2$, $-3$, $-4$, &c., ac pro ſingulis ex æquatione inveſtigantur valores Applicatæ $y$ convenientes, ſicque plurima innoteſcunt puncta ſatis vicina, per quæ Curva tranſibit, ex quibus proinde tractus Curvæ facile perſpicietur.

CAPUT

# CAPUT V.

## *De Lineis ſecundi Ordinis.*

85. Quia in Linearum ordine primo ſola Linea recta continetur cujus indoles jam ſatis ex Geometria elementari conſtat, Lineas SECUNDI ORDINIS aliquanto diligentius contemplemur, quod eæ inter omnes Lineas curvas ſint ſimpliciſſimæ, atque per totam Geometriam ſublimiorem uſum habeant ampliſſimum. Præditæ autem ſunt iſtæ Lineæ, quæ etiam SECTIONES CONICÆ vocantur, plurimis inſignibus proprietatibus, quas cum antiquiſſimi Geometræ eruerunt, tum recentiores amplificarunt. Harumque proprietatum cognitio adeo neceſſaria judicatur, ut a plerisque Auctoribus ſtatim poſt Geometriam elementarem explicari ſoleant. Quoniam vero iſtæ proprietates omnes non ex uno principio derivari poſſunt, ſed alias æquatio patefecit, alias generatio ex Sectione Coni, alias denique alii deſcribendi modi, hic tantum eas proprietates inveſtigabimus, quas æquatio ſola ſine aliis ſubſidiis ſuppeditat.

86. Conſideremus ergo æquationem generalem pro Lineis ſecundi ordinis, quæ eſt

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta yy,$$

quam æquationem ita comparatam eſſe oſtendimus, ut, quocunque angulo Applicatæ ad Axem inclinatæ ſtatuantur, ea tamen ſemper omnes Lineas ſecundi Ordinis in ſe complectatur. Tribuatur jam iſti æquationi hæc forma

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma) y}{\zeta} + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = o,$$

ex qua patet cuique Abſciſſæ $x$ reſpondere vel duas Applica-



Digitized by Google

LIB. II. tas $y$, vel nullam, prout binæ radices ipſius $y$ fuerint vel reales vel imaginariæ. Quod ſi autem fuerit $\zeta = 0$ tum unica quidem Applicata ſingulis Abſciſſis reſpondebit, altera abeunte in infinitum, quam ob rem iſte caſus noſtram indagationem non turbabit.

TAB. V. Fig. 19. 87. Quoties autem ambo ipſius $y$ valores fuerint reales; id quod evenit, ſi Applicata $PMN$ Curvam in duobus punctis $M$ & $N$ interſecat, erit ſumma radicum $PM + PN = \frac{-\epsilon x - \gamma}{\zeta} = \frac{-\epsilon . AP - \gamma}{\zeta}$, ſumta recta $AEF$ pro Axe, $A$ pro initio Abſciſſarum, & angulo $APN$, quo Applicatæ Axi inſiſtunt, poſito obliquo pro lubitu. Quod ſi ergo ſub eodem angulo ducatur quævis alia Applicata $npm$, cujus quidem valor $pm$ eſt negativus, erit eodem modo $pn - pm = \frac{-\epsilon . Ap - \gamma}{\zeta}$. Subtrahatur hæc æquatio a priori, erit $PM + pm + PN - pn = \frac{\epsilon (Ap - AP)}{\zeta} = \frac{\epsilon . Pp}{\zeta}$. Ducantur ex punctis $m$ & $n$ rectæ Axi parallelæ, donec priori Applicatæ occurrant in punctis $\mu$ & $\nu$, eritque $M\mu + N\nu = \frac{\epsilon . Pp}{\zeta}$, ſeu ſumma $M\mu + N\nu$ ad $Pp$ ſeu $m\mu$ ſeu $n\nu$ rationem habebit conſtantem ut $\epsilon$ ad $\zeta$. Ratio ſcilicet hæc perpetuo erit eadem, ubicunque in Curva ducantur rectæ $MN$ & $mn$, dummodo cum Axe datum faciant angulum, atque rectæ $n\nu$ & $m\mu$ Axi parallelæ ducantur.

TAB. V. Fig. 20. 88. Si Applicata $PMN$ eo promoveatur, quo puncta $M$ & $N$ coincidant, tum Applicata tanget Curvam; ubi enim duæ interſectiones conveniunt, ibi Linea ſecans abit in tangentem. Sit igitur $KCI$ ejuſmodi tangens, cui ducantur parallelæ quotcunque rectæ $MN$, $mn$, Curvæ utrinque occurrentes, cujuſmodi rectæ vocari ſolent CHORDÆ & ORDINATÆ. Tum ex punctis $M$, $N$, $m$, $n$ ad tangentem producantur rectæ $MI$, $NK$; & $mi$, $nk$ Axi prius aſſumto parallelæ. Quia nunc intervalla $CK$, $Ck$ ad contrariam puncti $C$ partem cadunt,

Digitized by Google

negative capi debebunt. Hinc erit $CI - CK : MI = \epsilon : \zeta$ & $Ci - Ck : mi = \epsilon : \zeta$; ideoque $CI - CK : MI = Ci - Ck : mi$ ſeu $MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$. 

89. Quia poſitio Axis reſpectu Curvæ eſt arbitraria, rectæ $MI$, $NK$, $mi$, $nk$ pro lubitu duci poterunt, dummodo inter ſe fuerint parallelæ: eritque ſemper $MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$. Quod ſi ergo rectæ parallelæ $MI$ & $NK$ ita ducantur ut fiat $CI = CK$; quod evenit ſi parallelæ $MI$ & $NK$ ſtatuantur rectæ $CL$, quæ ex contactu $C$ ducta Ordinatam $MN$ in $L$ biſecat: tum, ob $CI - CK = 0$, fiet quoque $Ci - Ck = \frac{mi}{MI}(CI - CK) = 0$. Quare producta recta $CL$ in $l$, quia, ob $mi$ & $nk$ pariter ipſi $CL$ parallelas, eſt $ml = Ci$ & $nl = Ck$, erit $ml = nl$. Unde ſequitur rectam $CLl$, quæ ex puncto contactus $C$ ducta unam Ordinatam $MN$ tangenti parallelam biſecat, eandem omnes Ordinatas $mn$ eidem tangenti parallelas bifariam ſecare.

90. Cum igitur recta $CLl$ omnes Ordinatas tangenti $ICK$ parallas in duas partes æquales ſecet, hæc Linea $CLl$ vocari ſolet DIAMETER *Lineæ ſecundi ordinis* ſeu *Sectionis conicæ.* Hinc innumerabiles in unaquaque Linea ſecundi Ordinis duci poſſunt Diametri, quia in ſingulis punctis Curvæ datur tangens. Ubicunque enim data fuerit tangens $ICK$, ducatur una quævis Ordinata $MN$ hinc tangenti parallela, qua in $L$ biſecta, erit recta $CL$ Diameter Lineæ ſecundi ordinis, omnes Ordinatas tangenti $IK$ parallelas bifariam ſecans.

91. Ex his etiam ſequitur, ſi recta $Ll$ duas quaſvis parallelas Ordinatas $MN$ & $mn$ biſecet, eandem eſſe omnes reliquas Ordinatas illis parallelas biſecturam: dabitur enim alicubi recta Curvam tangens $IK$ his Ordinatis parallela, ideoque dabitur Diameter. Hinc nova habetur methodus in data Linea ſecundi ordinis innumerabiles Diametros inveniendi; ducantur enim pro lubitu duæ Ordinatæ ſeu Chordæ $MN$ & $mn$ inter ſe parallelæ, quibus biſectis in $L$ & $l$, recta per hæc puncta ducta omnes reliquas Ordinatas illis parallelas pariter biſecabit, eritque

LIB. II. propterea Diameter. Atque ubi Diameter producta Curvam ſecat in $C$, per id recta $IK$ Ordinatis parallela ducta Curvam in puncto $C$ tanget.

92. Ad hanc proprietatem nos manuduxit conſideratio ſummæ binarum radicum ipſius $y$ ex æquatione

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \epsilon x + \alpha}{\zeta} = 0.$$

TAB. V. Fig. 19. Ex eadem vero æquatione conſtat fore productum ambarum radicum $PM.PN = \frac{\delta xx + \epsilon x + \gamma}{\zeta}$, quæ expreſſio $\frac{\delta xx + \epsilon x + \gamma}{\zeta}$ vel duos Factores habet ſimplices reales vel ſecus. Illud evenit ſi Axis Curvam in duobus punctis $E$ & $F$ ſecet, quia enim his in locis fit $y = 0$, erit $\frac{\delta xx + \epsilon x + \alpha}{\zeta} = 0$, hincque radices ipſius $x$ erunt $AE$ & $AF$, atque adeo Factores $(x - AE)(x - AF)$ ita ut ſit $\frac{\delta xx + \epsilon x + \alpha}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}(x - AE)(x - AF) = \frac{\delta}{\zeta}.PE.PF$ ob $x = AP$. Hanc ob rem ergo erit $PM.PN = \frac{\delta}{\zeta}.PE.PF$: ſeu rectangulum $PM.PN$ ad rectangulum $PE.PF$ conſtantem habebit rationem ut $\delta$ ad $\zeta$ ubicunque Applicata $PMN$ ducatur, dummodo ſit angulus $NPF$ aſſumto, quo Applicatæ ad Axem inclinari ponuntur, æqualis. Erit ergo ſimili modo, ſi ducatur Applicata $mn$ ob $Ep$ & $pm$ negativas $pm.\ pn = \frac{\delta}{\zeta} pE.pF$.

TAB. V. Fig. 21. 93. Ducta ergo recta quæcunque $PEF$ Lineam ſecundi ordinis ſecante in duobus punctis $E$, $F$, ſi ad eam parallelæ ducantur Ordinatæ quotcunque $NMP$, $npm$, erit ſemper $PM.PN : PE.PF = pm.pn : pE.pF$, utraque enim hujus proportionis ratio æquatur $\delta : \zeta$. Simili modo ſi, quia Axis poſitio eſt arbitraria, recta $PMN$ ſumatur pro Axe, atque ipſi $PEF$ alia quæcunque parallela ducatur $eqf$, erit quoque $PM.$

$PN : PE.PF = qM.qN : qe : qf = pm.pn : pE.pF$. Ergo alternando $qe.qf : pE.pF = qM.qN : pm.pn$. Datis igitur duabus Ordinatis parallelis $ef$ & $EF$, ſi aliæ quæcunque duæ Ordinatæ inter ſe parallelæ $MN$ & $mn$ ducantur, illas ſecantes in punctis $P, p, q, r$, erunt hæ rationes omnes inter ſe æquales. $PM.PN : PE.PF = pm.pn : pE.pF = qM.qN : qe.qf = rm.rn : re.rf$. Quæ eſt altera proprietas generalis Linearum ſecundi ordinis. 

94. Si igitur duo Curvæ puncta $M$ & $N$ coincidant, recta $PMN$ fiet Curvæ tangens in concurſu illorum duorum punctorum, abibitque rectangulum $PM.PN$ in quadratum ipſius $PM$ vel $PN$, unde nova tangentium proprietas obtinebitur. Tangat nimirum recta $CPp$ Lineam ſecundi ordinis in puncto $C$, & ducantur lineæ quotvis $PMN$, $pmn$ inter ſe parallelæ, quæ ergo omnes cum tangente eundem angulum conſtituant. Ex proprietate igitur ante inventa erit. TAB. VI. *Fig.* 24.

$$PC^2 : PM.PN = pC^2 : pm.pn,$$

ſeu quæcunque Ordinata $MN$ ad tangentem ſub angulo dato ducatur, erit ſemper quadratum rectæ $CP$ ad rectangulum $PM \times PN$ in ratione conſtante.

95. Indidem etiam ſequitur, ſi Lineæ ſecundi ordinis ducatur Diameter quæcunque $CD$, omnes Ordinatas $MN$, $mn$ inter ſe parallelas bifariam ſecans, atque ipſa Diameter Curvæ occurrat in punctis duobus $C$ & $D$, fore TAB. V. *Fig.* 20.

$$CL.LD : LM.LN = Cl.lD : lm.ln.$$

Cum autem ſit $LM = LN$, & $lm = ln$, erit $LM^2 : lm^2 = CL.LD : Cl.lD$, ſeu perpetuo erit quadratum ſemiordinatæ $LM$ ad rectangulum $CL.LD$ in ratione conſtante. Hinc ſumta Diametro $CD$ pro Axe, & ſemiordinatis $LM$ pro Applicatis, reperietur æquatio pro Lineis ſecundi ordinis. Sit enim Diameter $CD = a$, Abſciſſa $CL = x$ & Applicata $LM = y$, ob $LD = a - x$ erit, $y^2$ ad $ax - xx$ in ratione

Digitized by Google

LIB. II. conſtante, quæ ſit ut $h$ ad $k$, unde orietur iſta pro Lineis ſecundi ordinis æquatio $yy = \frac{h}{k}(ax - xx)$.

TAB. V. *Fig.* 22. 96. Ex ambabus autem jam inventis Linearum ſecundi Ordinis proprietatibus conjunctim aliæ erui poterunt proprietates. Dentur in Linea ſecundi ordinis duæ Ordinatæ inter ſe parallelæ $AB$ & $CD$, & compleatur quadrilaterum $ACDB$, quod ſi jam per punctum quodcunque Curvæ $M$ ducatur Ordinata $MN$ illis $AB$ & $CD$ parallela ſecans rectas $AC$ & $BD$ in punctis $P$ & $Q$, erunt partes $PM$ & $QN$ inter ſe æquales. Nam recta, quæ biſecat Ordinatas duas $AB$ & $CD$ inter ſe parallelas, biſecabit quoque Ordinatam $MN$: at, per Geometriam elementarem, eadem recta biſecans latera $AB$ & $CD$ quoque biſecabit portionem $PQ$. Cum igitur lineæ $MN$ & $PQ$ in eodem puncto biſecentur, neceſſe eſt ut ſit $MP = NQ$ & $MQ = NP$. Dato ergo, præter quatuor Lineæ ſecundi ordinis puncta $A$, $B$, $C$, & $D$, quinto $M$ ex eo reperietur ſextum $N$, ſumto $NQ = MP$.

97. Cum jam ſit $MQ.QN$ ad $BQ.DQ$ in ratione conſtante, ob $QN = MP$ erit quoque $MP.MQ$ ad $BQ.DQ$ in eadem ratione conſtante. Scilicet, ſi aliud quodcunque Curvæ punctum, uti $c$, ſumatur, & per id recta $GcH$ ipſis $AB$, & $CD$ parallela ducatur donec lateribus $AC$ $BD$ occurrat in punctis $G$ & $H$, erit quoque $cG.cH$ ad $BH.DH$ in eadem ratione conſtante, ideoque $cG.cH : BH.DH = MP.MQ : BQ.DQ$. Quod ſi autem per $M$ baſi $BD$ parallelæ ducatur $RMS$ Ordinatis parallelis $AB$, $CD$ occurrens in $R$ & $S$, erit, ob $BQ = MR$ & $DQ = MS$, hæc quoque ratio $MP.MQ : MR.MS$ conſtans. Si igitur per quodvis Curvæ punctum $M$ duæ ducantur rectæ, altera $MPQ$ lateribus oppoſitis $AB$, $CD$ parallela, altera vero $RMS$ baſi $BD$ parallela, interſectiones $P$, $Q$, $R$, & $S$ ita erunt comparatæ, ut ſit $MP.MQ$ ad $MR.MS$ in ratione conſtante.

98. Si loco Ordinatæ $CD$, quæ poſita eſt ipſi $AB$ parallela, ex puncto $D$ alia quæcunque $Dc$ in ejus locum ſubſ-

Digitized by Google

tituatur, & Chorda $Ac$ jungatur: ita ut nunc rectæ $MQ$ & $RMS$, 
ductæ, ut ante, per $M$ lateribus $AB$ & $BD$ parallelæ, latera quadrilateri $ABDc$ ſecent in punctis $p$, $Q$, $R$ & $s$; ſimilis proprietas locum habebit. Cum enim ſit $MP. MQ : BQ \times DQ = cG. cH : BH. DH$ ſeu $MP. MQ : MR. MS = cG. cH : BH. DH$, ob rectam $RS$ ipſi $BD$ parallelam & æqualem. Triangula vero ſimilia $APp$, $AGc$ & $DSs$, $cHD$, præbent has proportiones $Pp : AP = Gc : AG$; ſeu, ob $AP : AG = BQ : BH$, hanc $Pp : BQ = Gc : BH$: altera ſimilitudo dat hanc $DS$, $(MQ) : Ss = cH : DH$, quibus conjunctis fit

$$MQ. Pp : MR. Ss = cG. cH : BH. DH \text{, ob } BQ = MR.$$

Hæc proportio cum ſuperiori collata præbet

$$MP. MQ : MR. MS = Pp. MQ : MR. Ss,$$

unde addendo antecedentes & conſequentes ſit

$$MP. MQ : MR. MS = Mp. MQ : MR. Ms,$$

ubicunque ergo ſumantur puncta $c$ & $M$ in Curva, erit ſemper ratio $Mp. MQ$ ad $MR. Ms$ eadem, dummodo rectæ $MQ$ & $Rs$ per $M$ ducantur Chordis $AB$ & $BD$ parallelæ. Ex ſuperiore vero proportione ſequitur fore $MP : MS = Mp : Ms$. Cum igitur, variato puncto $c$, tantum puncta $p$ & $s$ mutentur, erit $Mp$ ad $Ms$ in data ratione, utcunque punctum $c$ varietur, dum punctum $M$ fixum ſervatur.

99. Quod ſi quatuor quæcunque puncta $A$, $B$, $C$, $D$ in Linea ſecundi ordinis fuerint data, eaque jungantur rectis, ut habeatur trapezium inſcriptum $ABDC$, proprietas Sectionum conicarum latiſſime patens ex præcedenti deducitur. Scilicet, ſi ex Curvæ puncto quovis $M$ ad ſingula trapezii latera ſub datis angulis ducantur rectæ $MP$, $MQ$, $MR$ & $MS$, erunt ſemper rectangula binarum harum linearum ad oppoſita latera ductarum inter ſe in data ratione, nempe erit $MP. MQ$ TAB VI. Fig. 23.

Digitized by Google

Tab. II. ad $MR. MS$ in data ratione eadem, ubicunque punctum $M$ in Curva capiatur, dummodo anguli ad $P$, $Q$, $R$ & $S$ iidem ſerventur. Ad hoc oſtendendum ducantur per $M$ duæ rectæ $Mq$ & $rs$, illa lateri $AB$ hæc lateri $BD$ parallela, ac notentur interſectionum cum lateribus trapezii puncta $p$, $q$, $r$ & $s$: eritque per prius inventum $Mp. Mq$ ad $Mr. Ms$ in data ratione. Propter omnes autem angulos datos datæ erunt rationes $MP:Mp$, $MQ:Mq$, $MR:Mr$, & $MS:Ms$, ex quibus ſequitur fore $MP. MQ$ ad $MR. MS$ in data quoque ratione.

Tab. VI. Fig. 24. 100. Quoniam ſupra vidimus, ſi Ordinatæ parallelæ $MN$, $mn$ producantur, quoad tangenti cuipiam $CPp$ occurrant in $P$ & $p$, fore $PM. PN : CP^2 = pm. pn : Cp^2$. Quare, ſi puncta $L$ & $l$ notentur, ut ſit $PL$ media proportionalis inter $PM$ & $PN$, pariterque $pl$ media proportionalis inter $pm$ & $pn$, erit $PL^2 : CP^2 = pl^2 : Cp^2$; ideoque erit $PL : CP = pl : Cp$, unde patet omnia puncta $L$, $l$ in Linea recta per punctum contactus $C$ tranſeunte eſſe ſita. Quare, ſi una Applicata $PMN$ ita ſecetur in $L$ ut ſit $PL^2 = PM. PN$, recta $CLD$ per puncta $C$ & $L$ ducta omnes reliquas Applicatas $pmn$ ita quoque ſecabit in $l$ ut ſit $pl$ media proportionalis inter $pm$ & $pn$. Vel, ſi duæ Applicatæ $PN$ & $pn$ ita in punctis $L$ & $l$ ſecentur, ut ſit $PL^2 = PM. PN$ & $pl^2 = pm. pn$ recta per $L$ & $l$ producta per punctum contactus $C$ tranſibit, atque omnes reliquas Applicatas illis parallelas in eadem ratione ſecabit.

Tab. VI. Fig. 25. 101. His Linearum ſecundi ordinis proprietatibus, quæ ex forma æquationis immediate conſequuntur, expoſitis; progrediamur ad alias magis reconditas inveſtigandas. Sit igitur propoſita æquatio pro his Lineis ſecundi ordinis generalis

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0,$$

ex qua cum cuivis Abſciſſæ $AP = x$, duplex Applicata $y$ nempe

Digitized by Google

nempe $PM$ & $PN$ reſpondeat, poſitio Diametri omnes Ordinatas $MN$ bifariam ſecantis definiri poteſt. Sit enim $IG$ iſta Diameter, quæ Ordinatam $MN$ ſecabit in puncto medio $L$, quod ergo punctum eſt in Diametro. Ponatur $PL = z$; &, cum ſit $z = \frac{1}{2} PM + \frac{1}{2} PN$, erit $z = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{2\zeta}$, ſeu $2\zeta z + \varepsilon x + \gamma = 0$, quæ eſt æquatio poſitionem Diametri $IG$ præbens. 

102. Hinc porro longitudo Diametri $IG$ definiri poterit, quæ dat loca bina in Curva, ubi puncta $M$ & $N$ coincidunt, ſeu ubi fit $PM = PN$. Ex æquatione vero dantur $PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta}$ & $PM.PN = \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta}$, unde fit $(PM - PN)^2 = (PM + PN)^2 - 4PM.PN = \frac{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)xx + 2(\varepsilon\gamma - 2\beta\zeta)x + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}{\zeta\zeta} = 0$, ſeu $xx - \frac{2(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}x + \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta} = 0$, cujus æquationis propterea radices ſunt $AK$ & $AH$ ita ut ſit $AK + AH = \frac{4\beta\zeta - 2\varepsilon\gamma}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ & $AK.AH = \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$: hinc fit $(AH - AK)^2 = KH^2 = \frac{4(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 - 4(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)^2}$. At eſt $IG^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon + 4\zeta\zeta}{4\zeta\zeta} KH^2$, ſi quidem Applicatæ Axem normales ſtatuantur.

103: Sint iſtæ Applicatæ, quas hic ſumus contemplati, normales ad Axem $AH$; nunc vero hinc quæramus æquationem pro Applicatis obliquangulis. Ducatur ergo ex quovis Curvæ puncto $M$ ad Axem Applicata obliquangula $Mp$ faciens cum Axe angulum $MpH$, cujus Sinus ſit $= \mu$ & Coſinus $= \nu$. Sit nova Abſciſſa $Ap = t$, Applicata $pM = u$, erit $\frac{y}{u} = \mu$ & $\frac{Pp}{u} = \nu$, unde erit $y = \mu u$ & $x = t + \nu u$, qui valores

 in æquatione inter $x$ & $y$, quæ erat $o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \epsilon xy + \zeta yy$, ſubſtituti præbent

$$o = \alpha + \beta t + \nu\beta u + \delta tt + 2\nu\delta tu + \nu\nu\delta uu$$
$$\quad + \mu\gamma u \qquad\quad + \mu\epsilon tu + \mu\nu\epsilon uu$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mu\mu\zeta uu$$

ſeu

$$uu + \frac{((\mu\epsilon + 2\nu\delta)t + \mu\gamma + \nu\beta)u + \delta tt + \beta t + \alpha}{\mu\mu\zeta + \mu\nu\epsilon + \nu\nu\delta} = o.$$

104. Hic ergo iterum quævis Applicata duplicem habebit valorem, nempe $pM$ & $pn$: quare ordinatarum $Mn$ Diameter $ilg$ pari modo ut ante definietur. Scilicet, biſecta Ordinata $Mn$ in $l$ erit $l$, punctum in Diametro. Ponatur ergo $pl = v$, erit $v = \frac{pM + pn}{2} = \frac{-(\mu\epsilon + 2\nu\delta)t - \mu\gamma - \nu\beta}{2(\mu\mu\zeta + \mu\nu\epsilon + \nu\nu\delta)}$. Demittatur ex $l$ in Axem $AH$ perpendiculum $lq$, ac ponatur $Aq = p$, $ql = q$, erit $\mu = \frac{q}{v}$ & $\nu = \frac{pq}{v} = \frac{p - t}{v}$, unde fit $v = \frac{q}{\mu}$, & $t = p - \nu v = p - \frac{\nu q}{\mu}$. Subſtituantur hi valores in æquatione inter $t$ & $v$ ante inventa, & prodibit

$$\frac{q}{\mu} = \frac{-\mu\epsilon p - 2\nu\delta p + \nu\epsilon q + 2\nu\nu\delta q : \mu - \mu\gamma - \nu\beta}{2\mu\mu\zeta + 2\mu\nu\epsilon + 2\nu\nu\delta},$$

ſeu

$$(2\mu\mu\zeta + \mu\nu\epsilon)q + (\mu\mu\epsilon + 2\mu\nu\delta)p + \mu\mu\gamma + \mu\nu\beta = o,$$

ſeu

$$(2\mu\zeta + \nu\epsilon)q + (\mu\epsilon + 2\nu\delta)p + \gamma\mu + \nu\beta = o,$$

qua æquatione poſitio Diametri $ig$ definitur.

105. Prior Diameter $IG$, cujus poſitio per hanc æquationem determinabatur $2\zeta z + \epsilon x + \gamma = o$, producta cum Axe concurrat in $O$, eritque $AO = \frac{-\gamma}{\epsilon}$; hinc fit $PO = \frac{-\gamma}{\epsilon} - x$, & anguli $LOP$ tangens erit $= \frac{z}{PO} = \frac{-\epsilon z}{\epsilon x + \gamma}$

$=\frac{\epsilon}{2\zeta}$, & tangens anguli $MLG$, ſub quo Diameter $IG$ Ordinatas $MN$ biſecat erit $=\frac{2\zeta}{\epsilon}$. Altera vero Diameter $ig$ producta Axi occurrat in $o$, eritque $Ao=\frac{-\mu\gamma-\nu\beta}{\mu\epsilon+2\nu\delta}$, & anguli $Aol$ tangens erit $=\frac{\mu\epsilon+2\nu\delta}{2\mu\zeta+\nu\epsilon}$. Cum jam anguli $AOL$ tangens ſit $=\frac{\epsilon}{2\zeta}$, ambæ Diametri ſe mutuo interſecabunt in puncto quodam $C$, facientque angulum $OCo=Aol-AOL$, cujus propterea tangens eſt $=\frac{4\nu\delta\zeta-\nu\epsilon\epsilon}{4\mu\zeta\zeta+2\nu\delta\epsilon+2\nu\epsilon\zeta+\mu\epsilon\epsilon}$. Angulus autem, ſub quo hæc altera Diameter ſuas Ordinatas biſecat, eſt $Mlo=180^\circ-lpo-Aol$: hujus propterea tangens eſt $=\frac{2\mu\mu\zeta+2\mu\nu\epsilon+2\nu\nu\delta}{\mu\mu\epsilon+2\mu\nu\delta-2\mu\nu\zeta-\nu\nu\epsilon}$.



106. Inquiramus autem in punctum $C$, ubi hæ duæ Diametri ſe mutuo interſecant: ex quo ad Axem perpendiculum $CD$ demittatur, ac vocetur $AD=g$, $CD=h$; eritque primo, quod $C$ in Diametro $IG$ extat, $2\zeta h+\epsilon g+\gamma=0$. Deinde, quia $C$ quoque in Diametro $ig$ reperitur, erit

$$(2\mu\zeta+\nu\epsilon)h+(\mu\epsilon+2\nu\delta)g+\mu\gamma+\nu\beta=0.$$

Subtrahatur hinc prior æquatio per $\mu$ multiplicata, ac remanebit

$$\nu\epsilon h+2\nu\delta g+\nu\beta=0,\ \text{ſeu}\ \epsilon h+2\delta g+\beta=0.$$

Ex his fit $h=\frac{-\epsilon g-\gamma}{2\zeta}=\frac{-2\delta g-\beta}{\epsilon}$, ideoque $(\epsilon\epsilon-4\delta\zeta)g=2\beta\zeta-\gamma\epsilon$, & $g=\frac{2\beta\zeta-\gamma\epsilon}{\epsilon\epsilon-4\delta\zeta}$ & $h=\frac{2\gamma\delta-\beta\epsilon}{\epsilon\epsilon-4\delta\zeta}$. In quibus determinationibus cum non inſint quantitates $\mu$ & $\nu$, a quibus obliquitas Applicatarum $pMn$ pendet, manifeſtum eſt punctum $C$ idem manere, utcunque obliquitas varietur.

LIB. II. 107. Omnes ergo Diametri $IG$ & $ig$ ſe mutuo in eodem puncto $C$ decuſſant : quod ergo ſi ſemel fuerit inventum, omnes Diametri per id tranſibunt ; ac viciſſim omnes rectæ per id ductæ erunt Diametri, quæ omnes Ordinatas ſub certo quodam angulo ductas biſecent. Cum igitur hoc punctum in quavis Linea ſecundi ordinis ſit unicum, in eoque omnes Diametri ſe mutuo decuſſent, hoc punctum vocari ſolet CENTRUM Sectionis conicæ. Quod ergo ex æquatione inter $x$ & $y$ propoſita

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy$$

ita invenitur, ut ſumta $AD = \frac{2\beta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$, capiatur $CD = \frac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$.

108. Supra autem invenimus eſſe $AK + AH = \frac{4\beta\zeta - 2\gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ : ſunt autem $IK$ & $GH$ perpendicula ex terminis Diametri $IG$ in Axem demiſſa ; unde perſpicitur eſſe $AD = \frac{AK + AH}{2}$, atque ideo punctum $D$ erit medium inter puncta $K$ & $H$. Quam ob rem Centrum quoque $C$ in medio Diametri $IG$ erit ſitum ; quod cum de quavis alia Diametro æque valeat, conſequens eſt non ſolum omnes Diametros ſe mutuo in eodem puncto $C$ decuſſare, ſed etiam ſe invicem biſariam ſecare.

TAB. VII. Fig. 26. 109. Sumamus nunc quamcunque Diametrum $AI$ pro Axe ad quem Ordinatæ $MN$ applicatæ ſint ſub angulo $APM = q$, cujus Sinus $= m$ & Coſinus $= n$. Ponatur Abſciſſa $AP = x$ & Applicata $PM = y$, cujus cum duo ſint valores æquales alter alterius negativus eorumque adeo ſumma $= o$, æquatio generalis pro Linea ſecundi Ordinis abibit in hanc formam $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ ; quæ, ſi ponatur $y = o$, dabit puncta $G$ & $I$ in Axe, ubi is a Curva trajicitur ; æquationis ſci-

Digitized by Google

licet $xx + \frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha}{\gamma}o$ radices erunt $x = AG$ & $x =$ 
$AI$; ideoque habebitur $AG + AI = \frac{-\beta}{\gamma}$, & $AG.AI = \frac{\alpha}{\gamma}$. Cum igitur Centrum $C$ in medio Diametri $GI$ ſit poſitum, facile reperietur Centrum Sectionis conicæ $C$. Erit enim $AC = \frac{AG + AI}{2} = \frac{-\beta}{2\gamma}$.

110. Cognito jam Centro Sectionis conicæ $C$, in Axe $AI$, id convenientiſſime pro initio Abſciſſarum accipietur. Statuatur ergo $CP = t$, quia manet $PM = y$, ob $x = AC - CP = \frac{-\beta}{2\gamma} - t$, prodibit hæc æquatio inter Coordinatas $t$ & $y$

$$yy = \alpha - \frac{\beta\beta}{2\gamma} + \frac{\beta\beta}{4\gamma} - \beta t + \beta t + \gamma tt$$

ſeu

$$yy = \alpha - \frac{\beta\beta}{4\gamma} + \gamma tt.$$

Poſito igitur $x$ loco $t$, habebitur æquatio generalis pro Lineis ſecundi ordinis, ſumta Diametro quacunque pro Axe, & Centro pro Abſciſſarum initio, quæ, mutata conſtantium forma, erit $yy = \alpha - \beta xx$. Poſito ergo $y = o$ fiet $CG = CI = \surd\frac{\alpha}{\beta}$, ideoque tota Diameter $GI$ erit $= 2\surd\frac{\alpha}{\beta}$.

111. Ponatur $x = o$, ac reperietur Ordinata per Centrum tranſiens $EF$: fiet ſcilicet $CE = CF = \surd\alpha$; ideoque tota Ordinata $EF = 2\surd\alpha$; quæ, quia per Centrum tranſit, pariter erit Diameter, cum illa $GI$ angulum faciens $ECG = q$. Hæc autem altera Diameter $EF$ biſecabit omnes Ordinatas priori Diametro $GI$ parallelas; facta enim Abſciſſa $AP$ negativa, Applicata $aC$ verſus $I$ cadens manebit priori $PM$ æqualis; &, cum eidem ſit parallela, puncta ambo $M$ juncta dabunt Lineam Diametro $GI$ parallelam, ideoque biſecandam

 a Diametro $EF$. Hæ igitur ambæ Diametri $GI$ & $EF$ ita inter ſe ſunt affectæ, ut altera biſecet omnes Ordinatas alteri parallelas, quam ob reciprocam proprietatem hæ duæ Diametri inter ſe CONJUGATÆ appellantur. Si igitur in terminis $G$ & $I$ Diametri $GI$ ducantur rectæ alteri Diametro $EF$ parallelæ, tangent hæ Lineam curvam, ſimilique modo ſi per $E$ & $F$ ducantur rectæ Diametro $GI$ parallelæ eæ tangent Curvam in punctis $E$ & $F$.

112. Ducatur nunc Applicata quævis $MQ$ obliquangula; ſitque angulus $AQM = \varphi$, ejus Sinus $= \mu$ & Coſ. $= \nu$. Ponatur Abſciſſa $CQ = t$, & Applicata $MQ = u$, eritque in triangulo $PMQ$ ob ang. $PMQ = \varphi - q$ ac propterea *ſin.* $PMQ = \mu n - \nu m$, $y : u : PQ = \mu : m : \mu n - \nu m$ hincque $y = \frac{\mu u}{m}$ & $PQ = \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$, unde $x = t - PQ = t - \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$. Subſtituantur hi valores in æquatione ſuperiori $yy = \alpha - \beta xx$, ſeu $yy + \beta xx - \alpha = 0$, ac orietur

$$(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)uu - 2\beta m(\mu n - \nu m)tu + \beta m^2 tt - \alpha m^2 = 0,$$

ex qua Applicata $u$ duos obtinet valores $QM$ & $-Qn$ eritque $QM - Qn = \frac{2\beta m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu \mu)^2}$. Biſecetur Ordinata $Mn$ in $p$, eritque recta $Cpg$ nova Diameter ſecans omnes Ordinatas ipſi $Mn$ parallelas bifariam, eritque $Qp = \frac{\beta m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}$.

113. Obtinetur autem hinc anguli $GCg$ tangens $= \frac{\mu . Qp}{CQ + \nu . Qp}$, vel *tang.* $GCg = \frac{\beta m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\beta(\mu n - \nu m)}$ & *tang.* $Mpg = \frac{\mu . CQ}{pQ + \nu . CQ} = \frac{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}{\mu\nu + \beta(\mu n - \nu m)(\nu m + \mu m)}$, qui eſt angulus ſub quo novæ Ordinatæ $Mn$ a Diametro $gi$ biſecantur. Porro vero erit $Cp^2 = CQ^2 + Qp^2 + 2\nu . CQ \times$

$$Qp = \frac{\mu^4 + 2\mathfrak{C}\mu^3 n(\mu n - \nu m) + \mathfrak{C}\mathfrak{C}\mu\mu(\mu n - \nu m)^2}{(\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)^2} tt$$ : ideoque 

$$Cp = \frac{\mu t \surd(\mu^4 + 2\mathfrak{C}\mu n(\mu n - \nu m) + \mathfrak{C}\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)}{\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2}.$$

Ponatur $Cp = r$ & $pM = s$, eritque $t = \frac{(\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2) r}{\mu \surd(\mu^4 + 2\mathfrak{C}\mu n(\mu n - \nu m) + \mathfrak{C}\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)}$ & $u = s + Qp = s + \frac{\mathfrak{C}m(\mu n - \nu m) r}{\mu \surd(\mu^4 + 2\mathfrak{C}\mu n(\mu n - \nu m) + \mathfrak{C}\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)}$,

qui valores porro dant

$$y = \frac{\mu s}{m} + \frac{\mathfrak{C}(\mu n - \nu m) r}{\surd(\ldots\ldots\ldots)}$$
$$x = -\frac{(\mu n - \nu m) s}{m} + \frac{\mu r}{\surd(\ldots\ldots\ldots)},$$

unde ex æquatione $yy + \mathfrak{C}xx = \alpha$ orietur $\frac{(\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2) ss}{mm} + \frac{\mathfrak{C}(\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2) rr}{\mu\mu + 2\mathfrak{C}\mu n(\mu n - \nu m) + \mathfrak{C}\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2} - \alpha = 0$.

114. Vocemus jam ſemidiametrum $CG = f$ & ſemiconjugatam $CE = CF = g$, eritque $f = \surd\frac{\alpha}{\mathfrak{C}}$ & $g = \surd\alpha$, ſeu $\alpha = gg$ & $\mathfrak{C} = \frac{gg}{ff}$: unde fit $yy + \frac{ggxx}{ff} = gg$. Ponamus porro angulum $GCg = p$, erit $tang.\ p = \frac{\mathfrak{C}m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)}$. At, ob angulum $GCE = q$, ſi ponatur angulus $ECe = \varpi$, erit $AQM = \varphi = q + \varpi$; ideoque $\mu = ſin.(q + \pi)$; $\nu = coſ.(q + \varpi)$, $m = ſin.\ q$ & $n = coſ.\ q$. Ergo $tang.\ p = \frac{\mathfrak{C}.\ ſin.\ q.\ ſin.\ \varpi}{ſin.\ (q + \varpi) + \mathfrak{C}.\ coſ.\ q.\ ſin.\ \pi} = \frac{\mathfrak{C}.\ tang.\ q.\ tang.\ \varpi}{tang.\ q + tang.\ \varpi + \mathfrak{C}\ tang.\ \varpi}$, &

$$ſin.\ p = \frac{\mathfrak{C}.\ ſin.\ q.\ ſin.\ \pi}{\surd(\mu\mu + 2b\mu n(\mu n - \nu m) + \mathfrak{C}\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)},$$

atque

LIB. II. $\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2 = (\text{ſin.}(q + \varpi)^2) + \beta(\text{ſin.}\,\varpi)^2$; quibus valoribus in ſubſidium vocatis prodit iſta æquatio inter $r$ & $s$ $\frac{((\text{ſin.}\,\overline{q+\varpi})^2 + \beta(\text{ſin.}\,\varpi)^2)ss}{(\text{ſin.}\,q)^2} + \frac{\beta((\text{ſin.}\,\overline{q+\pi})^2 + \beta(\text{ſin.}\,\pi)^2)rr}{\beta\beta(\text{ſin.}\,q)^2(\text{ſin.}\,\varpi)^2}$ $(\text{ſin.}\,p)^2 - \alpha = 0$. At eſt $\beta = \frac{\text{tang.}\,p.\,\text{ſin.}(q+\pi)}{(\text{ſin.}\,q - \text{coſ.}\,q.\,\text{tang.}\,p).\,\text{ſin.}\,\pi} = \frac{\text{tang.}\,p.\,(\text{tang.}\,q + \text{tang.}\,\varpi)}{\text{tang.}\,\pi\,(\text{tang.}\,q - \text{tang.}\,p)} = \frac{gg}{ff} = \frac{\text{cot.}\,\varpi.\,\text{tang.}\,q + 1}{\text{cot.}\,p.\,\text{tang.}\,q - 1}$, ſeu $\text{tang.}\,q = \frac{ff + gg}{gg\,\text{cot.}\,p - ff.\,\text{cot.}\,\pi}$, unde plurima conſectaria deduci poſſunt. Erit vero $\frac{gg}{ff} = \frac{\text{ſin.}\,p.\,\text{ſin.}(q+\pi)}{\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}(q-p)}$.

115. Sit ſemidiameter $Cg = a$, ejuſque ſemidiameter conjugata $C = b$; erit ex æquatione ante inventa,

$$a = \frac{\text{ſin.}\,q.\,\text{ſin.}\,\pi\sqrt{\alpha\beta}}{\text{ſin.}\,p\sqrt{((\text{ſin.}\,\overline{q+\pi})^2 + \beta(\text{ſin.}\,\pi)^2)}} = \frac{gg.\,\text{ſin.}\,q.\,\text{ſin.}\,\pi}{\text{ſin.}\,p\sqrt{(ff(\text{ſin.}(q+\pi))^2 + gg(\text{ſin.}\,\varpi)^2)}},$$ & $$b = \frac{fg.\,\text{ſin.}\,q}{\sqrt{(ff(\text{ſin.}(q+\pi)^2) + gg(\text{ſin.}\,\pi)^2)}};$$ hinc erit $a : b = g.\,\text{ſin.}\,\pi : f.\,\text{ſin.}\,p$. Eſt vero porro $(\text{ſin.}(q+\pi))^2 + \frac{gg}{ff}(\text{ſin.}\,\pi)^2 = \frac{\text{ſin.}(q+\pi)}{\text{ſin.}(q-p)}(\text{ſin.}(q-p).\,\text{ſin.}(q+\pi) + \text{ſin.}\,p.\,\text{ſin.}\,\pi) = \frac{\text{ſin.}\,q.\,(\text{ſin.}(q+\pi).\,\text{ſin.}(q+\pi-p)}{\text{ſin.}(q-p)}$, unde fiet $a = \frac{gg.\,\text{ſin.}\,\pi}{f.\,\text{ſin.}\,p}\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,q.\,\text{ſin.}(q-p)}{\text{ſin.}(q+\pi)\,\text{ſin.}(q+\pi-p)}}$; ſeu, ob $\frac{gg}{ff} = \frac{\text{ſin.}\,p.\,\text{ſin.}(q+\varpi)}{\text{ſin.}\,\pi.\,\text{ſin.}(q-p)}$, erit $a = f\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,q.\,\text{ſin.}(q+\pi)}{\text{ſin.}(q-p).\,\text{ſin.}(g+\pi-p)}}$ & $b = g\sqrt{\frac{\text{ſin.}\,q.\,\text{ſin.}(q-p)}{\text{ſin.}(q+\pi).\,\text{ſin.}(q+\pi-p)}}$, ergo erit $a : b = f.\,\text{ſin.}(q+\pi) : g.\,\text{ſin.}(q-p)$ & $ab = \frac{fg.\,\text{ſin.}\,q}{\text{ſin.}(q+\pi-p)}$.

116. Si ergo in Sectione conica binæ Diametri conjugatæ habeantur, $GI$, $EF$ & $gi$, $ef$, erit primo CAP. V.

$$Cg : Ce = CG.\text{ſin}.\,ECe : CG.\text{ſin}.\,GCg.$$

Ergo

$$\text{ſin}.\,GCg : \text{ſin}.\,ECe = CE.Ce : CG.Cg.$$

& ſi chordæ $Ee$ & $Gg$ ducantur, fiet hinc Triangulum $CGg =$ Triangulo $CEe$. Deinde erit $Cg : Ce = CG.\text{ſin}.GCe : CE.\text{ſin}.gCE$, ſeu $Ce.CG.\text{ſin}.\,GCe = CE.Cg.\text{ſin}.\,gCE$: unde, ſi ducantur chordæ $Ge$ & $gE$, erunt Triangula $GCe$ & $gCE$ inter ſe æqualia, ſeu e regione erit Triangulum $ICf =$ Triangulo $iCF$. Ultima vero æquatio $ab.\text{ſin}.\,(q + \pi - p) = fg.\text{ſin}.\,q$ dabit $Cg.\,Ce.\text{ſin}.\,gCe = CG.CE.\text{ſin}.\,GCE$. Quod ſi ergo ducantur chordæ $EG$ & $eg$, vel e regione $FI$ & $fi$ erunt pariter Triangula $ICF$ & $iCf$ æqualia: unde ſequitur omnia parallelogramma, quæ circa binas Diametros conjugatas deſcribuntur, inter ſe eſſe æqualia.

117. Habentur ergo tria triangulorum paria inter ſe æqualia, nempe,

I. Triangulum $FCf$ æquale Triangulo $ICi$.
II. Triangulum $fCI$ æquale Triangulo $FCi$.
III. Triangulum $FCI$ æquale Triangulo $fCi$.

Unde ſequitur fore trapezia $FfCI$ & $iICf$ inter ſe æqualia; a quibus ſi auferatur idem triangulum $fCI$, erit Triangulum $FIf =$ Triangulo $Ifi$: quæ cum ſuper eadem baſi $fI$ ſint conſtituta, neceſſe eſt ut ſit chorda $Fi$ chordæ $fI$ parallela. Porro itaque erit Triangulum $FIi =$ Triangulo $ifF$, ad quæ ſi addantur triangula æqualia $FCI$ & $fCi$, erunt quoque hæc trapezia inter ſe æqualia $FCIi = iCfF$.

118. Hinc etiam deducitur methodus ad quodvis Lineæ ſecundi ordinis punctum $M$ tangentem $MT$ ducendi. Sumta enim Diametro $GI$ pro Axe, cui conjugatæ ſemiſſis ſit $EC$, ex puncto $M$ ipſi $CE$ parallela ad Axem ducatur $MP$, quæ erit ſemiordinata, ac $PN = PM$. Ducta $CM$, quæ erit Semidiameter, quæratur ejus Semidiameter conjugata $CK$, cui tangens $MT$ quæſita erit parallela. Sit angulus $GCE = q$; TAB. VII. Fig. 27.



Digitized by Google

 $GCM = p$ & $ECK = \varpi$; erit, uti vidimus, $\frac{EC^2}{GC^2} = \frac{\text{ſin.}\,p.\,\text{ſin.}\,(q+\pi)}{\text{ſin.}\,\pi.\,\text{ſin.}\,(q-p)}$ & $MC = CG\surd\frac{\text{ſin.}\,q.\,\text{ſin.}\,(q+\pi)}{\text{ſin.}\,(q-p).\,\text{ſin.}\,(q+\pi-q)}$. At in Triangulo $CMP$ eſt $MC^2 = CP^2 + MP^2 + 2\,PM \times CP.\,\text{coſ.}\,q.$ & $MP : MC = \text{ſin.}\,p : \text{ſin.}\,q.$ & $MP : CP = \text{ſin.}\,p : \text{ſin.}\,(q-p)$. Deinde in Triangulo $CMT$, ob angulos datos, erit $CM : CT : MT = \text{ſin.}\,(q+\pi) : \text{ſin.}\,(q+\pi-p) : \text{ſin.}\,p$. Hinc, angulis eliminatis, erit $MC = CG\surd\frac{MC.\,CM}{CP.\,CT}$ ſeu $CG^2 = CP.\,CT$. Hinc erit $CP : CG = CG : CT$, unde poſitio tangentis expedite invenitur. Erit autem ex hac proportione *dividendo* $CP : PG = CG : TG$; & ob $CG = CI$ *componendo* $CP : IP = CG : TI$.

119. Cum ſit $\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\text{ſin.}\,p.\,\text{ſin.}\,(q+\varpi)}{\text{ſin.}\,\varpi.\,\text{ſin.}\,(q-p)}$ & $\frac{CK^2}{CM^2} = \frac{\text{ſin.}\,p.\,\text{ſin.}\,(q-p)}{\text{ſin.}\,p.\,\text{ſin.}\,(q+p)}$, itemque $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\text{ſin.}\,q.\,\text{ſin.}\,(q+\pi)}{\text{ſin.}\,(q-p)\,\text{ſin.}\,(q+\pi-p)}$ & $\frac{CK^2}{CE^2} = \frac{\text{ſin.}\,q.\,\text{ſin.}\,(q-p)}{\text{ſin.}\,(q+\varpi).\,\text{ſin.}\,(q+\pi-p)}$, erit $\frac{CE^2+CG^2}{CG^2} = \frac{\text{ſin.}\,p.\,\text{ſin.}\,(q+\varpi) + \text{ſin.}\,\varpi.\,\text{ſin.}\,(q-p)}{\text{ſin.}\,\pi.\,\text{ſin.}\,(q-p)}$, & $\frac{CK^2+CM^2}{CM^2} = \frac{\text{ſin.}\,p.\,\text{ſin.}\,(q-p) + \text{ſin.}\,\pi.\,\text{ſin.}\,(q+\varpi)}{\text{ſin}\,\varpi.\,\text{ſin.}\,(q+\pi)}$. At eſt $\text{ſin.}\,A.\,\text{ſin.}\,B = \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(A=B) - \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(A+B)$ & viciſſim $\frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,A - \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,B = \text{ſin.}\,\frac{A+B}{2}.\,\text{ſin.}\,\frac{B-A}{2}$. Unde erit $\text{ſin.}\,p.\,\text{ſin.}\,(q+\pi) + \text{ſin.}\,\varpi.\,\text{ſin.}\,(q-p) = \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(q+\varpi-p) - \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(q+\pi+p) + \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(q-\pi-p) - \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(q+\pi-p) = \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(q-\varpi-p) - \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(q+\pi+p) = \text{ſin.}\,q.\,\text{ſin.}\,(p+\pi)$. Atque $\text{ſin.}\,p.\,\text{ſin.}\,(q-p) + \text{ſin.}\,\pi.\,\text{ſin.}\,(q+\varpi) = \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(q-2p) - \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,q + \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,q -$

$\frac{1}{2} cof.(q+2\varpi)\frac{1}{2} = cof.(q-2p) - \frac{1}{2} cof.(q+2\varpi) =$ 
$fin.(q+\varpi-p).fin.(p+\varpi)$.

Hinc ergo erit

$$\frac{CE^2 + CG^2}{CG^2} = \frac{fin.\,q.\,fin.\,(p+\pi)}{fin.\,\pi.\,fin.\,(q-p)},$$

&

$$\frac{CK^2 + CM^2}{CM^2} = \frac{fin.\,(q+\pi-p).\,fin.\,(p+\pi)}{fin.\,\pi.\,fin.\,(q+\pi)},$$

unde conficitur

$$\frac{CE^2+CG^2}{CK^2+CM^2} = \frac{CG^2}{CM^2}\cdot\frac{fin.\,q.\,fin.\,(q-\pi)}{fin.(q-p).\,fin.(q+\pi-p)} = \frac{CG^2}{CM^2}\cdot\frac{CM^2}{CG^2}.$$

Quare erit $CE^2 + CG^2 = CK^2 + CM^2$, ideoque in eadem Linea ſecundi ordinis ſumma quadratorum binarum Diametrorum conjugatarum ſemper eſt conſtans.

120. Cum igitur dentur duæ Semidiametri conjugatæ $CG$ & $CE$, pro Semidiametro $CM$ ad lubitum aſſumta ſtatim reperitur ejus ſemidiameter conjugata $CK$ ſumendo $CK = \surd(CE^2 + CG^2 - CM^2)$. Ex ſuperioribus ergo Sectionum conicarum proprietatibus erit $TG.\,TI : TM^2 = CG.\,CI : CK^2 = CG^2 : CK^2 = CG^2 : CE^2 + CG^2 - CM^2$; ideoque $TM^2 = CG\surd\frac{CE^2 + CG^2 - CM^2}{TG.\,TI}$. Simili modo, ſi producta Ordinata $MN$, ducatur tangens $NT$, ambæ tangentes $MT$ & $NT$. Axi $TI$ in eodem puncto $T$ occurrent. Erit enim pro utraque $CP : CG = CG : CT$. At vero ducta recta $CN$ erit $TN = CG\surd\frac{CE^2 + CG^2 - CM^2}{TG.\,TI}$, adeoque $TM^2 : TN^2 = CE^2 + CG^2 - CM^2 : CE^2 + CG^2 - CN^2$. Erit vero, ob biſectam $MN$ in $P$, $fin.\,CTM : fin.\,CTN = TN : TM = \surd(CE^2 + CG^2 - CN^2) : \surd(CE^2 + CG^2 - CM^2)$.

121. Ducantur in terminis Diametri $A$ & $B$ tangentes $AK$, $BL$, ac producatur tangens quæcunque $MT$ donec utramque tangentem ſecet in punctis $K$ & $L$. Sit $ECF$ Diameter conjugata, cui tum Applicatæ $MP$ tum tangentes $AK$ & $BL$, Tab. VII. Fig. 23.

 erunt parallelæ. Cum jam ſit, ex natura tangentis, $CP : CA = CA : CT$ ob $CB = CA$ erit $CP : AP = CA : AT$, & $CP : BP = CA : BT$ ergo $CP : CA = CA : CT = AP : AT = BP : BT$, hincque $AT : BT = AP : BP$. At eſt $AT : BT = AK : BL$, ergo $AK : BL = AP : BP$. Deinde eſt $AT = \frac{CA.AP}{CP}$; $BT = \frac{CA.BP}{CP}$; & $PT = \frac{CA.AP}{CP} + AP = \frac{AP.BP}{CP}$ ergo $AT : PT = CA : BP = AK : PM$; ſimilique modo erit $BT : PT = CA : AP = BL : PM$; unde fit $AK = \frac{CA.PM}{BP}$, $BL = \frac{CA.PM}{AP}$ & $AK.BL = \frac{CA^2.PM^2}{AP.BP}$. At eſt $AP.BP : PM^2 = AC^2 : CE^2$, unde conſequitur iſta egregia proprietas $AK.BL = CE^2$, ex qua porro fit $AK = CE\sqrt{\frac{AP}{BP}}$ & $BL = CE\sqrt{\frac{BP}{AP}}$, & $AP : BP = AK^2 : CE^2 = CE^2 : BL^2 = KM : ML$, atque $AK : BL = KM : LM$.

122. In quocunque ergo Curvæ puncto $M$ ducatur tangens occurrens tangentibus parallelis $AK$, $BL$ in $K$ & $L$, erit ſemper Semidiameter $CE$ tangentibus $AK$ & $BL$ parallela media proportionalis inter $AK$ & $BL$, ſeu erit $CE^2 = AK \times BL$. Quod ſi ergo in alio quocunque Curvæ puncto $m$ ſimili modo ducatur tangens $kml$, erit quoque $CE^2 = Ak.Bl$, ideoque $AK : Ak = Bl : BL$; hincque erit quoque $AK : Kk = Bl : Ll$. Secent tangentes $KL$ & $kl$ ſe mutuo in $o$, eritque $AK : Bl = Ak : BL = Kk : Ll = ko : lo = Ko : Lo$. Atque hæ ſunt præcipuæ Sectionum conicarum proprietates, ex quibus Newtonus plurima inſignia problemata reſolvit in *Principiis*.

123. Cum ſit $AK : Bl = Ko : Lo$, ſi tangens $LB$ producatur in $I$ ut ſit $BI = AK$, erit $I$ punctum, ubi tangens ex altera parte ipſi $KL$ parallela hanc tangentem $LB$ eſſet ſectura, quemadmodum $K$ in tangente $LK$ eſt punctum, ubi ea

a tangente $AK$ ipſi $BL$ parallela ſecatur. Tranſibit ergo recta $IK$ per Centrum $C$, ibique biſariam ſecabitur. Quodſi igitur duæ quæcunque tangentes $BL$, $ML$, modo præſcripto in $I$ & $K$ producantur, eæque a tertia tangente $l\,m\,o$ in punctis $l$ & $o$ ſecentur, erit $BI : Bl = Ko : Lo$, &, *componendo*, $IB : Il = Ko : KL$, ubicunque ergo tertia tangens $lmo$ ducatur erit perpetuo $IB.KL = Il\,Ko$. Ducta ergo quarta tangente quacunque $\lambda\,\mu\,\omega$ binas primum aſſumtas $IL$ & $KL$ ſecante in $\lambda$ & $\omega$, erit pariter $IB.KL = I\lambda.K\omega$, ideoque $Il.Ko = I\lambda.K\omega$ ſeu $Il : I\lambda = K\omega : Ko$. Ductis ergo rectis $l\omega$, $\lambda o$, in qua ratione hæ ſecabuntur, recta per ſectionum puncta tranſiens in eadem ratione ſecabit rectam $IK$. Quare ſi rectæ $l\omega$ & $\lambda o$ biſecentur, recta per biſectionis puncta tranſiens, biſecabit quoque rectam $IK$ ideoque per Centrum Sectionis conicæ $C$ tranſibit. CAP. V.

124. Quod recta $n\,m\,H$, quæ rectas $l\omega$, $\lambda o$ in data ratione ſecat; in eadem ratione ſecare debeat rectam $KI$, ſi quidem fuerit $Il : I\lambda = K\omega : Ko$, ſeu $I\lambda : \lambda l = Ko : o\omega$, hoc modo ex Geometria oſtendetur. Secet recta $mn$ utramque $l\omega$ & $\lambda o$ in ratione $m : n$, ſeu ſit $\lambda\, m : m\,o = l\,n : n\,\omega = m : n$, & ea producta trajiciat tangentes $IL$, & $KL$ in $Q$ & $R$; eritque TAB. VIII. *Fig.* 30.

$$\textit{ſin.}\ Q : \textit{ſin.}\ R = \frac{ln}{Ql} : \frac{n\omega}{R\omega} = \frac{\lambda m}{Q\lambda} : \frac{mo}{Ro} = \frac{m}{Ql} : \frac{n}{R\omega},$$ ergo $Ql : R\omega = Q\lambda : Ro$, & *dividendo* $l\lambda : o\omega = Q\lambda : Ro = Ql : R\omega$. Cum vero ſit $l\lambda : o\omega = I\lambda : Ko$, erit quoque $QI : RK = l\lambda : o\omega$, & *ſin.* $Q : \textit{ſin.}\ R = \frac{m}{l\lambda} : \frac{n}{o\omega}$. At eſt quoque *ſin.* $Q : \textit{ſin.}\ R = \frac{HI}{QI} : \frac{HK}{KR} = \frac{HI}{l\lambda} : \frac{HK}{o\omega}$, unde fit $HI : HK = m : n = \lambda m : mo = ln : n\omega$.

125. Datis duabus Semidiametris conjugatis $CG$. $CE$, quæ angulum obliquum $GCE = q$ inter ſe comprehendant, ſemper reperiri poterunt duæ aliæ Semidiametri conjugatæ $CM$ & $CK$ quæ angulum $MCK$ rectum conſtituant. Sit angulus $GCM = p$; & poſito $ECK = \pi$, erit $q + \pi - p = 90°$. TAB. VII. *Fig.* 27.

Digitized by Google

 ideoque $\mathit{ſin}.\ \varpi = \mathit{coſ}.(q-p)$ & $\mathit{ſin}.(q+\varpi) = \mathit{coſ}.p$. Unde (ex §. 119.) erit $\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\mathit{ſin}.\ p.\ \mathit{coſ}.\ p.}{\mathit{ſin}.(q-p).\mathit{coſ}.(q-p)} = \frac{\mathit{ſin}.\ 2p}{\mathit{ſin}.\ 2(q-p)} = \frac{\mathit{ſin}.\ 2p}{\mathit{ſin}.\ 2q.\mathit{coſ}.\ 2p - \mathit{coſ}.\ 2q.\mathit{ſin}.\ 2p}$; ergo $\frac{CG^2}{CE^2} = \mathit{ſin}.\ 2q.\mathit{cot}.\ 2p - \mathit{coſ}.2q.$ ex quo fit $\mathit{cot}.\ 2\,GCM = \mathit{cot}.\ 2q + \frac{CG^2}{CE^2\,\mathit{ſin}\ 2q}$, quæ æquatio ſemper præbet ſolutionem poſſibilem. Erit vero $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\mathit{ſin}.\ q.\ \mathit{coſ}.\ p}{\mathit{ſin}.\ (q-p)}$ & $\frac{CG^2}{CM^2} = 1 - \frac{\mathit{tang}.\ p}{\mathit{tang}.\ q}$, unde $\mathit{tang}.\ p = \mathit{tang}.\ q - \frac{CG^2}{CM^2}\,\mathit{tang}.\ q$. At cum ſit $CM^2 + CK^2 = CG^2 + CE^2$ & $CK.CM = CG.CE.\mathit{ſin}.q.$; erit $CM + CK = \surd(CG^2 + 2\,CG.CE.\mathit{ſin}.q + CE^2)$ & $CM - CK = \surd(CG^2 - 2\,CG \times CE.\mathit{ſin}.\ q + CE^2)$ unde ipſæ Diametri conjugatæ orthogonales reperiuntur.

Tab. VII. Fig. 29. 126. Sint igitur $CA$ & $CE$ ambæ Semidiametri conjugatæ Sectionis conicæ orthogonales, quæ vocari ſolent Diametri principales, ſeſe in Centro $C$ normaliter decuſſantes. Sit Abſciſſa $CP = x$, Applicata $PM = y$, eritque, uti vidimus, $yy = \alpha - \beta xx$, vocatis autem Semidiametris principalibus $AC = a$, $CE = b$ erit $\alpha = bb$ & $\beta = \frac{bb}{aa}$, unde fit $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$. Ex qua æquatione intelligitur, cum non mutetur, ſive $x$ & $y$ ſumantur affirmativæ ſive negativæ, Curvam eſſe habituram quatuor partes ſimiles & æquales utrinque circa Diametros $AC$ & $EF$ ſitas. Erit nempe quadrans $ACE$ ſimilis & æqualis quadranti $ACF$, hiſque bini pares ad alteram partem Diametri $EF$ ſunt poſiti.

127. Si ex Centro $C$, quod pro initio Abſciſſarum aſſumſimus, ducamus rectam $CM$, erit ea $= \surd(xx + yy) = \surd(bb - \frac{bbxx}{aa} + xx)$, unde intelligitur, ſi fuerit $b = a$, ſeu $CE = CA$, fore $CM = \surd bb = b = a$. Hoc ergo caſu omnes rectæ ex Centro $C$ ad Curvam productæ inter ſe

erunt æquales; quæ, cum ſit proprietas Circuli, manifeſtum eſt Sectionem conicam, cujus binæ Diametri conjugatæ principales ſint inter ſe æquales, eſſe Circulum, cujus adeo æquatio inter Coordinatas orthogonales, poſitis $CP = x$ & $PM = y$, erit $yy = aa - xx$, exiſtente Radio Circuli $CA = a$. 

128. Sin autem non fuerit $b = a$, recta $CM$ per $x$ rationaliter nunquam exprimi poterit. Dabitur autem aliud punctum $D$ in Axe, a quo omnes rectæ ad Curvam ductæ $DM$ rationaliter exprimi poſſunt; ad quod inveniendum, ponatur $CD = f$, atque ob $DP = f - x$ erit $DM^2 = ff - 2fx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa} = bb + ff - 2fx + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$ quæ expreſſio quadratum evadet ſi fuerit $ff = \frac{(aa - bb)(bb + ff)}{aa}$ ſeu $0 = aa - bb - ff$, unde fit $f = \pm\sqrt{(aa - bb)}$, hujuſmodi ergo punctum dabitur geminum in Axe $AC$, utrinque ſcilicet a Centro in diſtantia $CD = \sqrt{(ab - bb)}$. Erit autem tum $DM^2 = aa - 2x\sqrt{(aa - bb)} + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$, hincque $DM = a - \frac{x\sqrt{(aa - bb)}}{a} = AC - \frac{CD.CP}{AC}$. Facto $CP = 0$, fiet $DM = DE = a = AC$, ſumta autem Abſciſſa $CP = CD$, ſeu $x = \sqrt{(aa - bb)}$, recta $DM$ abibit in Applicatam $DG$, eritque ergo $DG = \frac{bb}{a} = \frac{CE^2}{AC}$, ſeu fiet $DG$ tertia proportionalis ad $AC$ & $CE$.

129. Ob ſingularem hanc proprietatem, qua puncta $D$ hoc modo definita gaudent, iſta Diametri principalis puncta omnino attentione ſunt digna; plurimis aliis autem hæc eadem puncta prædita ſunt eximiis proprietatibus, ob quas peculiaria nacta ſunt nomina. Vocantur vero iſta puncta FOCI ſeu UMBILICI Sectionis conicæ; &, cum in Diametro majori $a$ ſint poſita, iſta Diameter a ſua conjugata $b$ ita diſtinguitur, ut ea vocetur Axis principalis & *tranſverſus*; dum altera $b$ ejus Axis *conjugatus* appellatur. Applicata vero orthogonalis $DG$ in ipſo

LIB. II. Foco alterutro erecta nomen SEMIPARAMETRI obtinuit, tota enim PARAMETER eſt Ordinata in $D$, ſeu $DG$ bis ſumta, quæ etiam *latus rectum* nuncupatur. Eſt ergo Semiaxis conjugatus $CE$ media proportionalis inter Semiparametrum $DG$ & Semiaxem tranſverſum $AC$. Termini porro Axis tranſverſi, ubi is a Curva interſecatur, vocantur VERTICES, ut $A$; atque hanc habent proprietatem ut iis in locis tangens curvæ ſit ad Axem principalem $AC$ normalis.

130. Ponatur ſemiparameter $DG = c$; & diſtantia Foci a Vertice $AD = d$, erit $CD = a - d = \surd(aa - bb)$ & $DG = \frac{bb}{a} = c$, unde fit $bb = ac$, & $a - d = \surd(aa - ac)$: ergo $ac = 2ad - dd$, & $a = \frac{dd}{2d - c}$, & $b = d\surd\frac{c}{2d - c}$. Ex datis ergo diſtantia Foci a Vertice $AD = d$ & ſemilatere recto $DG = c$, Sectio conica determinatur. Poſito nunc $CP = x$ erit $DM = a - \frac{(a-d)x}{a} = \frac{dd}{2d - c} - \frac{(c-d)x}{d}$. Sit $DP = t$, erit $x = CD - t = \frac{(c-d)d}{2d - c} - t$; unde fit $DM = c + \frac{(c-d)t}{d}$. Vocetur angulus $ADM = v$, erit $\frac{t}{DM} = -\mathit{coſ}.\, v$, ideoque $d. DM = cd + (d - c) DM. \mathit{coſ}.\, v$ & $DM = \frac{cd}{d - (d - c).\mathit{coſ}.\, v}$, & $\mathit{coſ}.\, v = \frac{d(DM - DG)}{(d - c) DM}$.

CAPUT

# CAPUT VI.

## *De Linearum ſecundi ordinis ſubdiviſione in genera.*

131. PROPRIETATES, quas in Capite præcedente elicuimus, in omnes Lineas, quæ ad ordinem ſecundum pertinent, æque competunt; neque enim ullius varietatis, qua iſtæ Lineæ aliæ ab aliis diſtinguuntur, fecimus mentionem. Quanquam autem omnes Lineæ ſecundi ordinis his expoſitis proprietatibus communiter gaudent, tamen eæ inter ſe ratione figuræ plurimum differunt; quamobrem Lineas in hoc ordine contentas diſtribui convenit in genera, quo facilius diverſæ figuræ, quæ in hoc ordine occurrunt, diſtingui, atque proprietates, quæ tantum in ſingula genera competunt, evolvi queant.

132. Æquationem autem generalem pro Lineis ſecundi ordinis, mutando tantum Axem & Abſciſſarum initium, eo reduximus, ut omnes Lineæ ſecundi ordinis contineantur in hac æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, in qua $x$ & $y$ denotant Coordinatas orthogonales. Cum igitur pro qualibet Abſciſſa $x$ Applicata $y$ duplicem induat valorem, alterum affirmativum alterum negativum, iſte Axis, in quo Abſciſſæ $x$ capiuntur, Curvam ſecabit in duas partes ſimiles & æquales; eritque adeo iſte Axis Diameter Curvæ orthogonalis, atque omnis Linea ſecundi ordinis habebit Diametrum orthogonalem, ſuper qua, tanquam Axe, Abſciſſas hic aſſumo.

133. Tres igitur ingrediuntur in hanc æquationem quantitates conſtantes $\alpha$, $\beta$, & $\gamma$: quæ, cum infinitis modis inter ſe variari poſſint, innumerabiles varietates in Lineis curvis orientur, quæ autem vel magis vel minus a ſe invicem ratione figuræ diſcrepabunt. Primum enim eadem figura infinities ex propoſita æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ reſultat; variato nempe Abſciſſarum initio in Axe, quod fit dum Abſciſſa $x$

LIB. II. data quantitate vel augetur vel minuitur. Deinde eadem quoque figura, ſub diverſa magnitudine in æquatione continetur, ita ut infinitæ Lineæ curvæ prodeant, quæ tantum ratione quantitatis a ſe invicem differant, uti Circuli diverſis Radiis deſcripti. Ex quibus manifeſtum eſt, non omnem litterarum $\alpha$, $\beta$, & $\gamma$ variationem diverſas Linearum ſecundi ordinis ſpecies vel genera producere.

134. Maximum autem diſcrimen in Lineis curvis quæ in æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ continentur, ſuggerit natura coëfficientis $\gamma$, prout is vel affirmativum habuerit valorem vel negativum. Si enim $\gamma$ habeat valorem affirmativum, poſita Abſciſſa $x$ infinita, quo caſu terminus $\gamma xx$ infinities major evadet quam reliqui $\alpha + \beta x$, ac propterea expreſſio $\alpha + \beta x + \gamma xx$ affirmativum obtinet valorem, Applicata $y$ pariter duplicem habebit valorem infinite magnum, alterum affirmativum alterum negativum, quod idem evenit ſi ponatur $x = -\infty$, quo caſu nihilominus expreſſio $\alpha + \beta x + \gamma xx$ induet valorem infinite magnum affirmativum. Hanc ob rem, exiſtente $\gamma$ quantitate affirmativa, Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes, binos Abſciſſæ $x = +\infty$ & binos Abſciſſæ $x = -\infty$ reſpondentes. Hæ igitur curvæ quatuor ramis in infinitum excurrentibus præditæ unum Linearum ſecundi ordinis genus conſtituere cenſentur, atque nomine HYPERBOLARUM appellantur.

135. Sin autem coëfficiens $\gamma$ negativum habuerit valorem, tum, poſito ſive $x = +\infty$ ſive $x = -\infty$ expreſſio $\alpha + \beta x + \gamma xx$ negativum valorem tenebit, ideoque Applicata $y$ imaginaria fiet. Neque igitur uſquam in his Curvis Abſciſſa neque Applicata poterit eſſe infinita, ideoque nulla dabitur Curvæ portio in infinitum excurrens, ſed tota Curva in ſpatio finito ac determinato continebitur. Hæc igitur Linearum ſecundi ordinis ſpecies nomen ELLIPSSIUM obtinuit, quarum propterea natura continetur in hac æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ ſi $\gamma$ fuerit quantitas negativa.

136. Cum igitur valor ipſius $\gamma$, prout is fuerit vel affirma-

Digitized by Google

tivus vel negativus, tam diverſam Linearum ſecundi ordinis indolem producat, ut hinc merito duo diverſa genera conſtituantur: ſi ponatur $\gamma = 0$, qui valor inter affirmativos & negativos medium tenet locum, Curva quoque hinc reſultans mediam quandam ſpeciem inter Hyperbolas atque Ellipſes conſtituet, quæ PARABOLA vocatur, cujus ergo natura hac exprimetur æquatione $yy = \alpha + \beta x$. Hic perinde eſt ſive $\beta$ fuerit quantitas affirmativa ſive negativa, quoniam indoles Curvæ non mutatur ſumta Abſciſſa $x$ negativa. Sit igitur $\beta$ quantitas affirmativa, atque manifeſtum eſt, creſcente Abſciſſa $x$ in infinitum, Applicatam $y$ quoque infinitam fore tam affirmativam quam negativam, ex quo Parabola duos habebit ramos in infinitum excurrentes, plures autem duobus habere non poterit, quia poſito $x = -\infty$, Applicatæ $y$ valor fit imaginarius.

137. Habemus ergo tres Linearum ſecundi ordinis ſpecies; Ellipſin, Parabolam, & Hyperbolam, quæ a ſe invicem tantopere diſcrepant, ut eas inter ſe confundere omnino non liceat. Diſcrimen enim eſſentiale in numero ramorum in infinitum excurrentium conſiſtit; Ellipſis enim nullam portionem habet in infinitum abeuntem, ſed tota in ſpatio finito includitur. Parabola vero duos habet ramos in infinitum excurrentes: & Hyperbola quatuor. Quare, cum in Capite præcedente proprietates Sectionum conicarum in genere ſimus contemplati, nunc quibus proprietatibus quæque ſpecies ſit prædita, videamus.

138. Incipiamus ab Ellipſi, cujus æquatio eſt hæc $yy = \alpha + \beta x - \gamma xx$, ſumtis Abſciſſis in Diametro orthogonali. Quoniam vero initium Abſciſſarum ab arbitrio noſtro pendet, ſi id removeamus intervallo $\frac{\beta}{2\gamma}$, orietur æquatio hujus formæ $yy = \alpha - \gamma xx$, in qua Abſciſſæ a Centro figuræ capiuntur. Sit igitur $C$ Centrum & $AB$ Diameter orthogonalis, atque erit Abſciſſa $CP = x$, & Applicata $PM = y$. Fiet ergo TAB. VIII. Fig. 31.



Digitized by Google

LIB. II. $y = 0$, ſumta $x = \pm \surd \frac{\alpha}{\gamma}$ &, ſi $x$ limites hos $+ \surd \frac{\alpha}{\gamma}$, $- \surd \frac{\alpha}{\gamma}$ tranſgrediatur Applicata $y$ fiet imaginaria; quod indicio eſt totam Curvam intra iſtos limites contineri. Erit ergo $CA = CB = \surd \frac{\alpha}{\gamma}$: tum facto $x = 0$, fiet $CD = CE = \surd \alpha$. Ponatur ergo Semidiameter ſeu Semiaxis principalis $CA = CB = a$, & Semiaxis conjugatus $CD = CE = b$, erit $\alpha = bb$ & $\gamma = \frac{bb}{aa}$. Unde pro Ellipſi iſta orietur æquatio $yy = bb - \frac{bbxx}{aa} = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$.

139. Quando iſti Semiaxes conjugati $a$ & $b$ fiunt inter ſe æquales, tum Ellipſis abibit in Circulum ob $yy = aa - xx$, ſeu $yy + xx = aa$; erit enim $CM = \surd(xx + yy) = a$, ideoque omnia Curvæ puncta $M$ æqualiter a Centro $C$ erunt remota, quæ eſt proprietas Circuli. Sin autem Semiaxes $a$ & $b$ inter ſe fuerint inæquales, tum Curva erit oblonga, nempe erit vel $AB$ major quam $DE$ vel $DE$ major quam $AB$. Quia vero Axes conjugati $AB$ & $DE$ inter ſe commutari poſſunt, atque perinde eſt in utro Abſciſſas capiamus, ponamus $AB$ eſſe Axem majorem, ſeu $a$ majorem quam $b$; atque in hoc Axe exiſtent Foci Ellipſis $F$ & $G$ ſumendo $CF = CG = \surd(aa - bb)$, Semiparameter vero, ſeu Semilatus rectum Ellipſis erit $= \frac{bb}{a}$, quæ exprimit magnitudinem Applicatæ in alterutro Foco $F$ vel $G$ erectæ.

140. Ad Curvæ punctum $M$ ducantur ex utroque Foco rectæ $FM$ & $GM$, eritque, uti ſupra vidimus, $FM = AC - \frac{CF.CP}{AC} = a - \frac{x\surd(aa - bb)}{a}$, & $GM = a + \frac{x\surd(aa - bb)}{a}$: unde fit $FM + GM = 2a$. Quare, ſi ad quodvis Curvæ punctum $M$ ex ambobus Focis ducantur rectæ $FM$ & $GM$, earum ſumma ſemper æquabitur Axi majori

Digitized by Google

$AB = 2a$; ex quo cum inſignis Focorum proprietas perſpicitur, tum modus facilis Ellipſin mechanice deſcribendi colligitur. 

141. In puncto $M$ ducatur tangens $TMt$, quæ Axibus occurrat in punctis $T$ & $t$; eritque, ut ſupra demonſtravimus, $CP : CA = CA : CT$; unde $CT = \frac{aa}{x}$: ſimilique modo, permutatis Coordinatis, $Ct = \frac{bb}{y}$. Erit ergo $TP = \frac{aa}{x} - x$, $TF = \frac{aa}{x} - \sqrt{(aa - bb)}$, & $TA = \frac{aa}{x} - a$. Fiet itaque $TP = \frac{aa - xx}{x} = \frac{aayy}{bbx}$, & $TM = \frac{y\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}{bbx}$, hincque *tang.* $CTM = \frac{bbx}{aay}$; *ſin.* $CTM = \frac{bbx}{\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}$ & *coſ.* $CTM = \frac{aay}{\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}$. Quare, ſi ad Axem in $A$ normalis erigatur $AV$, quæ Curvam ſimul tanget, erit $AV = \frac{a(a - x)}{x} \cdot \frac{bbx}{aay} = \frac{bb(a - x)}{ay} = b\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$ ob $ay = b\sqrt{(aa - xx)}$.

142. Cum ſit $FT = \frac{aa - x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$ & $FM = \frac{aa - x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$ erit $FT : FM = a : x$. Simili vero modo ob $GT = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$ & $GM = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$ erit $GT : GM = a : x$; unde erit $FT : FM = GT : GM$. At eſt $FT : FM =$ *ſin.* $FMT$ : *ſin.* $CTM$ & $GT : GM =$ *ſin.* $GMt$ : *ſin.* $CTM$, quam ob rem erit *ſin.* $FMT =$ *ſin.* $GMt$, ideoque angulus $FMT =$ angulo $GMt$. Ambæ ergo rectæ ex Focis ad punctum Curvæ quodvis $M$ ductæ æqualiter inclinantur ad tangentem Curvæ in illo puncto $M$, quæ eſt maxime principalis Factorum proprietas.

143. Cum ſit $GT : GM = a : x$, ob $CT = \frac{aa}{x}$ erit quo-

LIB. II. que $CT : CA = a : x$; unde $GT : GM = CT : CA$, quare ſi ex Centro $C$ rectæ $GM$ parallela ducatur $CS$, tangenti in $S$ occurrens, erit $CS = CA = a$: eodem autem modo ſi ex $C$ rectæ $FM$ parallela ducatur ad tangentem erit ea pariter $= CA = a$. Cum autem ſit $TM = \frac{y}{bbx}\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}$, erit, ob $aayy = aabb - bbxx$, $TM = \frac{y}{bx}\sqrt{(a^4 - xx)(aa - bb))}$: at eſt $FT.GT = \frac{a^4 - xx(aa - bb)}{xx}$; unde $TM = \frac{y}{b}\sqrt{FT.GT}$. Quare, ob $TG : TC = TM : TS$, erit $TS = \frac{TM.CT}{TG}$, ideoque $TS = \frac{y.CT}{b}\sqrt{\frac{FT}{GT}} = \frac{y.CT.FT}{b\sqrt{FT.GT}} = \frac{yy.CT.FT}{bb.TM}$. Deinde eſt $PT = \frac{aayy}{bbx} = \frac{CT.yy}{bb}$, ergo $TS = \frac{PT.FT}{TM}$, ideoque $TM : PT = FT : TS$; unde intelligitur triangula $TMP$ & $TFS$ eſſe ſimilia, ideoque rectam $FS$ ad tangentem ex Foco $F$ eſſe normalem. Erit vero $S\sqrt{} = \frac{AF.MV}{GM}$, quod ex his expreſſionibus eruere licet.

144. Quod ſi ergo ex alterutro Foco $F$ in tangentem ducatur perpendiculum $FS$, & ad punctum $S$ ex Centro $C$ recta $CS$ jungatur, erit hæc $CS$ perpetuo ſemiaxi majori $AC = a$ æqualis. Erit vero ob $TM : y = TF : FS$, $FS = \frac{y.TF}{TM} = \frac{b.TF}{\sqrt{FT.GT}} = b\sqrt{\frac{FT}{GT}}$, ergo $GT : FT = GM : FM = CD^2 : FS^2$; perpendiculum vero ex altero Foco in tangentem demiſſum erit $= b\sqrt{\frac{GT}{FT}}$, quare inter hæc perpendicula erit Semiaxis minor $CD = b$ media proportionalis. Demittatur nunc quoque ex Centro $C$ in tangentem perpendiculum $CQ$ erit $TF : FS = CT : CQ$ ergo $CQ = \frac{b.CT}{\sqrt{FT.GT}} =$

$\frac{bx.CT}{a\sqrt{FM.GM}} = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$, unde $CQ - FS = \frac{b.CF}{\sqrt{FT.GT}} =$ CAP. VII.
$CX$, ducta $FX$ tangenti parallela. Hinc erit $CQ - CX = \frac{b.TF}{\sqrt{FT.GT}}$ & $CQ + CX = \frac{b.TG}{\sqrt{FT.GT}}$, unde $CQ^2 - CX^2 = bb$ & $CX = \sqrt{(CQ^2 - bb)}$ : ex dato ergo Axe minori, in perpendiculo $CQ$ reperitur punctum $X$ unde normalis educta per Focum $F$ tranſibit.

145. His Focorum proprietatibus expoſitis, conſideremus duas quaſvis Diametros conjugatas. Erit autem $CM$ Semidiameter, cujus conjugata reperietur ſi tangenti $TM$ ex Centro parallela ducatur $CK$. Ponatur $CM = p$, $CK = q$, & angulus $MCK = CMT = s$, erit primo, $pp + qq = aa + bb$ & ſecundo $pq.\,ſin.\,s = ab$, uti ſupra vidimus. At vero erit $pp = xx + yy = bb + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$ & $qq = aa + bb - pp = aa - \frac{(aa - bb)xx}{aa} = FM.GM$, eodemque modo $pp = FK.GK$. Deinde, cum ſit $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$, erit $ſin.\,CMQ = ſin.\,s = \frac{ab}{p\sqrt{FM.GM}}$. Denique erit $TM : TP = \frac{y}{b}\sqrt{FT.GT}$, $\frac{aayy}{bbx} = \sqrt{FM.GM} = \frac{ay}{b} = CK : CR$, unde $CR = \frac{ay}{b}$, & $KR = \frac{bx}{a}$, ideoque $CR.KR = CP.PM$. Denique erit $ſin.\,FMS = \frac{b}{\sqrt{GM.FM}} = \frac{b}{q}$ : quia porro eſt $x = CP \frac{a\sqrt{(pp - bb)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$ & $y = \frac{b\sqrt{(aa - pp)}}{\sqrt{(aa - bb)}} = PM$, atque $CR = \frac{a\sqrt{(aa - pp)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$ & $KR = \frac{b\sqrt{(pp - bb)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$, erit $tang.\,ACM = \frac{y}{x}$, & $tang.\,2\,ACM = \frac{2yx}{xx - yy} = \frac{3ab\sqrt{(aa - pp)(pp - bb)}}{(aa + bb)pp - 2aabb}$. At eſt $ab = pq.\,ſin.\,s$, $aa + bb = pp + qq$,

LIB. II. & $\sqrt{(aa-pp)(pp-bb)} = -pq.coſ.s$, unde fit $tang.2ACM = \frac{-2qq.coſ.s}{pp+qq.coſ.2s}$, quia $coſ.s$ eſt negativus. Tandem eſt $CK^2 = MT.Mt$; ex ſuperioribus vero eruitur $MV = q\sqrt{\frac{AP}{BP}}$ & $AV = b\sqrt{\frac{AP}{BP}}$; unde erit $AV : MV = b : q = CE : CK$. Ergo rectæ, ſi ducantur, $AM$ & $EK$, inter ſe erunt parallelæ.

146. Quia eſt $pq.ſin.s = ab$, erit $pq$ major quam $ab$; &, cum ſit $pp + qq = aa + bb$, quantitates $p$ & $q$ magis ad rationem æqualitatis accedunt, quam $a$ & $b$, unde inter omnes Diametros conjugatas, illæ quæ ſunt orthogonales maxime a ſe invicem diſcrepant. Dabuntur ergo duæ Diametri conjugatæ inter ſe æquales, ad quas inveniendas ſit $q = p$, eritque $2pp = aa + bb$, & $p = q = \sqrt{\frac{aa+bb}{2}}$, & $ſin.s = \frac{2ab}{aa+bb}$, atque $coſ.s = \frac{-aa+bb}{aa-bb}$; unde fit $ſin.\frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{aa}{aa-bb}}$, $coſ.\frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{bb}{aa-bb}}$, ergo $tang.\frac{1}{2}s = \frac{a}{b} = tang.CEB$, & $MCK = 2CEB = AEB$. Porro $CP = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $CM = \frac{b}{\sqrt{2}}$, quare Semidiametri conjugatæ inter ſe æquales $CM$, $CK$ erunt parallelæ Cordis $AE$ & $BE$.

147. Si Abſciſſæ a Vertice $A$ computentur, ponaturque $AP = x$, $PM = y$, cum nunc ſit $a - x$ quod ante erat $x$, habebitur iſta æquatio $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx) = \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx$, ubi patet eſſe $\frac{2bb}{a}$ Parametrum ſeu latus rectum Ellipſis. Ponatur Semilatus rectum, ſeu Applicata in Foco $= c$, & diſtantia Foci a Vertice $AF = d$, erit $\frac{bb}{a} = c$ & $a - \sqrt{(aa-bb)} = d = a - \sqrt{(aa-ac)}$, unde fit $2ad - dd = ac$ & $a = \frac{dd}{2d-c}$. Hinc erit $yy = 2cx - \frac{c(2d-c)xx}{dd}$, quæ eſt

æquatio

æquatio pro Ellipſi inter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$, Abſciſſis $x$ in Axe principali $AB$ a Vertice $A$ computatis, quæ obtinetur ex datis diſtantia Foci a Vertice $AF = d$ & Similatere recto $= c$; ubi notandum eſt ſemper eſſe debere $2d$ majorem quam $c$, quia eſt $AC = a = \frac{dd}{2d - c}$, & $CD = b = d\sqrt{\frac{c}{2d - c}}$. 

148. Quod ſi ergo fuerit $2d = c$ erit $yy = 2cx$, quam æquationem ſupra vidimus eſſe pro Parabola: æquatio enim ſuperior $yy = \alpha + \beta x$ ad hanc formam reducitur, initio Abſciſſarum intervallo $= \frac{\alpha}{\beta}$ mutato. Sit igitur $MAN$ Parabola, cujus natura inter Abſciſſam $AP = x$, & Applicatam $PM = y$ hac æquatione exprimatur $yy = 2cx$. Erit ergo diſtantia Foci a Vertice $AF = d = \frac{1}{2}c$, & Semiparameter $FH = c$, atque ubique $PM^2 = 2FH.AP$: unde, poſita Abſciſſa $AP$ infinita, ſimul Applicatæ $PM$ & $PN$ in infinitum excreſcunt; ideoque Curva ad utramque Axis $AP$ partem in infinitum extenditur. Poſita autem Abſciſſa $x$ negativa Applicata fit imaginaria, hincque Axi ultra $A$ verſus $T$ nulla Curvæ portio reſpondet. TAB. VIII. Fig. 32.

149. Cum æquatio pro Ellipſi abeat in Parabolam, facto $2d = c$, manifeſtum eſt Parabolam nil aliud eſſe præter Ellipſin, cujus Semiaxis $a = \frac{dd}{2d - c}$ fit infinitus; quam ob rem proprietates omnes, quas pro Ellipſi invenimus, ad Parabolam transferentur, poſito Axe $a$ infinito. Primum autem, cum ſit $AP = \frac{1}{2}c$, erit $FP = x - \frac{1}{2}c$, hinc ducta ex Foco $F$ ad Curvæ punctum $M$ recta $FM$ erit, $FM^2 = xx - cx + \frac{1}{4}cc + yy = xx + cx + \frac{1}{4}cc$, ideoque $FM = x +$



Digitized by Google

 $\frac{1}{2}c = AP + AF$, quæ eſt præcipua proprietas Foci in Parabola.

150. Quoniam Parabola naſcitur ex Ellipſi, Axe majore in infinitum aucto; conſideremus Parabolam, tanquam eſſet Ellipſis, ſitque ejus Semiaxis $AC = a$, exiſtente $a$ quantitate infinita, ita ut Centrum $C$ infinite diſtet a Vertice $A$. Ad $M$ ducatur tangens Curvæ $MT$ Axi occurrens in $T$; quia erat $CP : CA = CA : CT$, erit $CT = \frac{aa}{a-x}$, ob $CP = a - x$; hincque $AT = \frac{ax}{a-x}$. At, cum ſit $a$ quantitas infinita, Abſciſſa $x$ præ ea evaneſcet, eritque $a - x = a$, ideoque $AT = x = AP$: quod idem hoc modo oſtendi poteſt, cum ſit $AT = \frac{ax}{a-x}$, erit $AT = x + \frac{xx}{a-x}$, at quia fractionis $\frac{xx}{a-x}$ denominator eſt infinitus, numeratore exiſtente finito, valor fractionis erit evaneſcens, ideoque $AT = AP = x$.

151. Quod ſi ergo ex puncto $M$ ad Centrum Parabolæ $C$ infinite diſtans ducatur Linea $MC$, quæ erit Axi $AC$ parallela, ea quoque erit Diameter Curvæ omnes Chordas tangenti $MT$ parallelas biſecans. Scilicet, ſi ducatur Chorda ſeu Ordinata $mn$ tangenti $MT$ parallela, ea a Diametro $Mp$ biſecabitur in $p$. Omnis ergo recta Axi $AP$ parallela ducta in Parabola erit Diameter obliquangula. Ad hujuſmodi Diametrorum naturam eruendam ſit $Mp = t$, $pm = u$, ducatur ex $m$ ad Axem normalis $msr$; erit ob $PT = 2x$, & $MT = \sqrt{(4xx + 2cx)}$, $\sqrt{(4xx+2cx)} : 2x : \sqrt{2cx} = pm : ps : ms$, unde obtinetur $ps = \frac{2xu}{\sqrt{(4xx+2cx)}} = u\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$, & $ms = u\sqrt{\frac{c}{2x+c}}$; hinc erit $Ar = x + t + u\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$, & $mr = \sqrt{2cx} + u\sqrt{\frac{c}{2x+c}}$. Quia vero eſt $mr^2 = 2c.Ar$,

erit $2cx + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}} + \frac{cuu}{2x+c} = 2cx + 2ct + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$, hincque $uu = 2t(2x+c) = 4\,FM.t$, ſeu $pm^2 = 4\,FM.Mp$. At anguli obliquitatis $mps$ erit Sinus $= \sqrt{\frac{c}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AF}{FM}}$, Coſinus $= \sqrt{\frac{2x}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AP}{FM}}$, ideoque *ſin.* $2\,mps = \frac{2\sqrt{2cx}}{2x+c} = \frac{y}{FM} =$ *ſin.* $MFp$, ergo erit angulus $mps = MTP = \frac{1}{2}\,MFr$.

152. Quia eſt $MF = AP + AF$, ob $AP = AT$, erit $FM = FT$; ideoque triangulum $MFT$ iſoſceles, & angulus $MFr = 2\,MTA$, ut modo invenimus. Cum deinde ſit $MT = 2\sqrt{x(x+\frac{1}{2}c)}$, erit $MT = 2\sqrt{AP.FM}$, hinc ex Foco $F$ in tangentem demiſſo perpendiculo erit $MS = TS = \sqrt{AP.FM} = \sqrt{AT.TF}$, unde erit $AT:TS = TS:TF$. Ex qua analogia perſpicitur punctum $S$ fore in recta $AS$ ad Axem in Vertice $A$ normali. Erit vero $AS = \frac{1}{2}PM$, & $AS:TS = AF:FS$, ergo $FS = \sqrt{AF.FM}$ & $FS$ erit media proportionalis inter $AF$ & $FM$. Præterea vero erit $AS:MS = AS:TS = FS:FM = \sqrt{AF}:\sqrt{FM}$. Quod, ſi ducatur ad tangentem in $M$ normalis $MW$ Axem ſecans in $W$, erit $PT:PM = PM:PW$, ſeu $2x:\sqrt{2cx} = \sqrt{2cx}:PW$, unde fit $PW = c$, ubique igitur intervallum $PW$, quod in Axe inter Applicatam $PM$ & normalem $WM$ intercipitur, conſtantem habet magnitudinem atque æquale eſt ſemiſſi Lateris recti, ſeu Applicata $FH$. Erit autem $FW = FT = FM$ & $MW = 2\sqrt{AF.FM}$.

153. Pervenimus jam ad Hyperbolam, cujus natura exprimitur hac æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, Abſciſſis ſuper Diametro orthogonali ſumtis. Quod ſi autem initium Abſciſſarum transferatur intervallo $\frac{\beta}{2\gamma}$, orietur ejuſmodi æquatio

LIB. II. $yy = \alpha + \gamma xx$, in qua Abſciſſæ a Centro computantur. Debet autem $\gamma$ eſſe quantitas affirmativa; quod vero ad $\alpha$ attinet, perinde eſt ſive ea ſit quantitas affirmativa ſive negativa, permutatis enim Coordinatis $x$ & $y$, affirmatio quantitatis $\alpha$ in

TAB. IX. Fig. 33. negationem mutatur & viciſſim. Quam ob rem ſit $\alpha$ quantitas negativa, & $yy = \gamma xx - \alpha$, atque apparet Applicatam $y$ bis evaneſcere: ſcilicet, ſi fuerit $x = +\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ & $x = -\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$. Denotante ergo $C$ Centro, ſint $A$ & $B$ loca, ubi Axis a Curva trajicitur; ac, poſito Semiaxe $CA = CB = a$, erit $a = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, & $\alpha = \gamma aa$, unde fit $yy = \gamma xx - \gamma aa$. Quamdiu ergo eſt $x^2$ minor quam $a^2$, Applicata erit imaginaria, unde toti Axi $AB$ nulla Curvæ portio reſpondet. Sumto vero $xx$ majore quam $aa$, Applicatæ continuo creſcunt, atque tandem in infinitum abeunt, habebit ergo Hyperbola quatuor ramos $AI$, $Ai$, $BK$, $Bk$ in infinitum excurrentes & inter ſe ſimiles atque æquales, quæ eſt proprietas principalis Hyperbolarum.

154. Quia, poſito $x = 0$, fit $yy = -\gamma aa$, Hyperbola non inſtar Ellipſis habebit Axem conjugatum, quod in Centro $C$ Applicata eſt imaginaria. Erit ergo ipſe Axis conjugatus imaginarius, quem, ut aliquam ſimilitudinem Ellipſis ſervemus, ponamus $= b\sqrt{-1}$, ita ut ſit $\gamma aa = bb$, & $\gamma = \frac{bb}{aa}$. Vocata ergo Abſciſſa $CP = x$, & Applicata $PM = y$, erit $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, ideoque æquatio pro Ellipſi ante tractata $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ tranſmutatur in æquationem pro Hyperbola ponendo $-bb$ loco $bb$. Ob hanc ergo affinitatem proprietates Ellipſis ante inventæ facile ad Hyperbolam transferuntur. Ac primo quidem, cum pro Ellipſi diſtantia Focorum a Centro eſſet $= \sqrt{(aa - bb)}$, pro Hyperbola

Digitized by Google

erit $CF = CG = \sqrt{(aa+bb)}$. Hinc erit $FP = x - \sqrt{(aa+bb)}$ & $GP = x + \sqrt{(aa+bb)}$; unde, ob $yy = -bb + \frac{bbxx}{aa}$, fiet $FM = \sqrt{(aa + xx + \frac{bbxx}{aa} - 2x\sqrt{(aa+bb)})} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} - a$ & $GM = \sqrt{(aa + xx + \frac{bbxx}{aa} + 2x\sqrt{(aa+bb)})} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} + a$. Ductis ergo ex utroque Foco ad Curvæ punctum $M$ rectis $FM$, $GM$ erit $FM + AC = \frac{CP.CF}{CA}$ & $GM - AC = \frac{CP.CF}{CA}$, harum ergo rectarum differentia $GM - FM$ æqualis eſt $2AC$. Quemadmodum ergo in Ellipſi ſumma harum duarum Linearum æquatur Axi principali $AB$, ita pro Hyperbola differentia æqualis eſt Axi principali $AB$.

155. Hinc etiam poſitio tangentis $MT$ definiri poteſt, eſt enim perpetuo pro Lineis ſecundi ordinis $CP : CA = CA . CT$: unde fit $CT = \frac{aa}{x}$, & $PT = \frac{xx - aa}{x} = \frac{aayy}{bbx}$; hincque $MT = \frac{y}{bbx}\sqrt{(b^4x^4 + a^4y^4)} = \frac{y}{bx}\sqrt{(aaxx + bbxx - a^4)}$. At eſt $FM.GM = \frac{aaxx + bbxx - a^4}{aa}$, ergo $MT = \frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM}$. Deinde eſt $FT = \sqrt{(aa+bb)} - \frac{aa}{x}$, & $GT = \sqrt{(aa+bb)} + \frac{aa}{x}$ ergo $FT : FM = a : x$, & $GT : GM = a : x$, unde ſequitur $FT : GT = FM : GM$, quæ proportio indicat angulum $FMG$ per tangentem $MT$ biſecari, eſſeque $FMT = GMT$. Recta autem $CM$ producta erit Diameter obliquangula omnes Ordinatas tangenti $MT$ parallelas biſecans.

156. Demittatur ex Centro $C$ in tangentem perpendicularis $CQ$, erit $TM : PT : PM = CT : TQ : CQ$ ſeu $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM} : \frac{aayy}{bbx} : y = \frac{aa}{x} : TQ : CQ$; unde oritur

Digitized by Google

LIB. II. $TQ = \frac{a^3 y}{bx\sqrt{FM.GM}}$ & $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$. Demittatur ſimili modo ex Foco $F$ in tangentem perpendiculum $FS$, erit $TM:PT:PM = FT:TS:FS$, ſeu $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM} : \frac{aayy}{bbx} : y = \frac{a.FM}{x} : TS : FS$: unde oritur $TS = \frac{aay\,FM}{bx\sqrt{FM.GM}}$ & $FS = \frac{b.FM}{\sqrt{FM.GM}}$; pariterque, ſi ex altero Foco $G$ in tangentem ducatur perpendicularis $Gs$, erit $Ts = \frac{aay.GM}{bx\sqrt{FM.GM}}$, & $Gs = \frac{b.GM}{\sqrt{FM.GM}}$. Hinc ergo habetur $TS.Ts = \frac{a^4yy}{bbxx} = \frac{aa(xx-aa)}{xx} = CT.PT$, & $TS:CT = PT:Ts$. Deinde fit $FS.Gs = bb$. Quia porro eſt $QS = Qs$ erit $QS = \frac{TS+Ts}{2} = \frac{aay(FM+GM)}{2bx\sqrt{FM.GM}} = \frac{ay\sqrt{(aa+bb)}}{b\sqrt{FM.GM}} = Qs$, unde ſequitur $CS^2 = CQ^2 + QS^2 = \frac{aab^4 + a^4yy + aabbyy}{bb.FM.GM} = \frac{aab^4 + (aa+bb)(bbxx-aabb)}{bb.FM.GM} = \frac{(aa+bb)xx - a^4}{FM.GM} = aa$. Erit ergo, uti in Ellipſi, recta $CS = a = CA$. Deinde eſt $CQ + FS = \frac{bx\sqrt{(aa+bb)}}{a\sqrt{FM,GM}}$, ideoque $(CQ+FS)^2 - CQ^2 = \frac{bbxx(aa+bb) - a^4bb}{aa.FM.GM} = bb$. Quare; ſi ducatur ex Foco $F$ tangenti parallela $FX$, ſecans perpendiculum $CQ$ productum in $X$, erit $CX = \sqrt{(bb + CQ^2)}$, cui ſimilis proprietas pro Ellipſi eſt inventa.

157. Si in Verticibus $A$ & $B$ ad Axem perpendiculares erigantur donec tangenti occurrant in $V$ & $v$, ob $AT = \frac{a(x-a)}{x}$ & $BT = \frac{a(x+a)}{x}$, $PT:PM = AT:AV = BT:Bv$, hinc fit $AV = \frac{bb(x-a)}{ay}$ & $Bv = \frac{bb(x+a)}{ay}$; ergo

$AV . Bv = \frac{b^4 (xx - aa)}{aayy} = bb$, ſeu $AV . Bv = FS . Gs$. Deinde $PT : TM = AT : TV = BT : Tv$; ergo $TV = \frac{b(x-a)}{xy} \sqrt{FM . GM}$ & $Tv = \frac{b(x+a)}{xy} \sqrt{FM . GM}$: unde fit $TV . Tv = \frac{aa}{xx} FM . GM = FT . GT$. Simili autem modo hinc plura alia conſectaria deduci poſſunt.

158. Quia eſt $CT = \frac{aa}{x}$, patet quo major capiatur Abſciſſa $CP = x$, eo minus futurum eſſe intervallum $CT$: atque adeo tangens, quæ Curvam in infinitum productam tangit, per ipſum Centrum $C$ tranſibit, fietque $CT = 0$. Cum autem ſit *tang.* $PTM = \frac{PM}{PT} = \frac{bbx}{aay}$, puncto $M$ in infinitum abeunte, ſeu poſito $x = \infty$, fit $y = \frac{b}{a} \sqrt{(xx - aa)} = \frac{bx}{a}$. Tangens ergo Curvæ in infinitum productæ, & per Centrum $C$ tranſibit, & cum Axe angulum conſtituet $ACD$ cujus tangens $= \frac{b}{a}$. Poſita ergo in Vertice $A$ ad Axem normali $AD = b$, tum recta $CD$ in infinitum utrinque producta, Curvam nuſquam quidem tanget, at Curva continuo magis ad eam appropinquabit, donec in infinitum tota cum recta $CI$ confundatur. Hoc idem valebit de parte $Ck$, quæ tandem cum ramo $Bk$ confundetur. Atque ſi ad alteram partem ſub eodem angulo ducatur recta $KCi$, ea cum ramis $BK$ & $Bi$ in infinitum productis conveniet. Hujuſmodi autem Lineæ rectæ, ad quas Linea quæpiam Curva continuo propius accedit, in infinitum autem excurrens demum attingit, ASYMTOTÆ vocantur, unde Lineæ rectæ $ICk$, $KCi$ ſunt binæ Aſymtotæ Hyperbolæ.

159. Aſymtotæ ergo ſe mutuo in Centro $C$ Hyperbolæ decuſſant, atque ad Axem inclinantur angulo $ACD = ACd$, cujus tangens $= \frac{b}{a}$, anguliquе dupli $DCd$ tangens $= \frac{2ab}{aa - bb}$,

Digitized by Google

 unde patet ſi fuerit $b = a$, fore angulum, ſub quo Aſymtotæ ſe interſecant, $DCd =$ recto; quo caſu Hyperbola *æquilatera* dicitur. Cum autem ſit $AC = a$, $AD = b$, erit $CD = Cd = \sqrt{(aa+bb)}$; quare, ſi ex Foco $G$ in utramvis Aſymtotam perpendiculum $GH$ demittatur, ob $CG = \sqrt{(aa+bb)} = CD$, erit $CH = AC = BC = a$, & $GH = b$.

160. Producatur Ordinata $MPN = 2y$ utrinque donec Aſymtotas ſecet in $m$ & $n$; erit $Pm = Pn = \frac{bx}{a}$, & $Cm = Cn = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} = FM + AC = GM - AC$. Tum vero erit $Mm = Nn = \frac{bx - ay}{a}$ & $Nm = Mn = \frac{bx+ay}{a}$, unde fit $Mm.\,Nm = Mm.\,Mn = \frac{bbxx - aayy}{aa} = bb$, ob $aayy = bbxx - aabb$: erit ergo ubique $Mm.\,Nm = Mm \times Mn = Nn.\,Nm = Nn.\,Mn = bb = AD^2$. Ducatur ex $M$ Aſymtotæ $Cd$ parallela $Mr$; erit $2b\sqrt{(aa+bb)} = Mm : mr\,(Mr)$, unde fit $mr = Mr = \frac{(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab}$ & $Cm - mr = Cr = \frac{(bx+ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab}$. Hinc ergo conficietur $Mr.\,Cr = \frac{(bbxx - aayy)(aa+bb)}{4aabb} = \frac{aa+bb}{4}$. Vel, ducta ex $A$ Aſymtotæ $Cd$ parallela $AE$, erit $AE = CE = \frac{1}{2}\sqrt{(aa+bb)}$, ideoque erit $Mr.\,Cr = AE.\,CE$; quæ eſt proprietas primaria Hyperbolæ ad Aſymtotas relatæ.

Tab. IX. Fig. 34. 161. Quod ſi ergo Abſciſſæ $CP = x$, in una Aſymtota a Centro ſumantur, & Applicatæ $PM = y$ alteri Aſymtotæ parallelæ ſtatuantur, erit $yx = \frac{aa+bb}{4}$, exiſtente $AC = BC = a$, & $AD = Ad = b$: ſeu, ſi ponatur $AE = CE = h$, erit $yx = hh$, & $y = \frac{hh}{x}$. Poſito ergo $x = 0$, fit $y = \infty$, ac viciſſim facto $x = \infty$ fiet $y = 0$. Agatur jam per

per punctum Curvæ $M$ recta quæcunque $QMNR$, quæ parallela ſit ductæ pro libitu rectæ $GH$, ac ponatur $CQ = t$, $QM = u$, erit $GH : CH : CG = u : PQ : PM$, ergo $PQ = \frac{CH}{GH} u$, $PM = \frac{CG}{GH} u$ : unde $y = \frac{CG}{GH} u$ & $x = t - \frac{CH}{GH} u$; quibus valoribus ſubſtitutis, erit $\frac{CG}{GH} t u - \frac{CH.CG}{GH^2} \times u u = h h$, ſeu $u u - \frac{GH}{CH} t u + \frac{GH^2}{CH.CG} h h = 0$. Habebit ergo Applicata $u$ duplicem valorem, nempe $QM$ & $QN$, quarum ſumma erit $= \frac{GH}{CH} t = QR$, & rectangulum $QM \times QN = \frac{GH^2}{CH.CG} h h$. CAP. VI.

162. Cum igitur ſit $QM + QN = QR$, erit $QM = RN$ & $QN = RM$. Quare, ſi puncta $M$ & $N$ conveniant quo caſu recta $QR$ Curvam tanget, tum ea in ipſo puncto contactus biſecabitur. Scilicet, ſi recta $XY$ tangat Hyperbolam, punctum contactus $Z$ in medio rectæ $XY$ erit poſitum. Unde, ſi ex $Z$ alteri Aſymtotæ parallela ducatur $ZV$, erit $CV = VY$, hincque ad quodvis Hyperbolæ punctum $Z$ expedite tangens ducetur. Sumatur ſcilicet $VY = CV$, ac recta per $Y$ & Curvæ punctum $Z$ ducta Hyperbolam in hoc puncto $Z$ tanget.

Cum ergo ſit $CV.ZV = hh = \frac{aa+bb}{4}$, erit $CX.CY = aa + bb = CD^2 = CD.Cd$: quocirca, ſi rectæ $DX$ & $dY$ ducerentur, eæ inter ſe forent parallelæ; unde facillimus oritur modus quotcunque Curvæ tangentes ducendi.

163. Quoniam deinde eſt rectangulum $QM.QN = \frac{GH^2}{CH.CG} hh$, patet, ubicunque recta $QR$ ipſi $HG$ parallela ducatur, fore ſemper rectangulum $QM.QN$ ejuſdem magnitudinis. Erit ergo etiam $QM.QN = QM.MR = QN \times NR = \frac{CH^2}{CH.CG} hh$. Quod, ſi ergo concipiatur ducta tan-

LIB. II. gens ipſi $QR$ parallela, quia ea intra Aſymtotas in puncto contactus biſecabitur, & ſi tangentis ſemiſſis vocetur $= q$, erit ſemper $QM.QN = QM.MR = RN.RM = RN \times NQ = qq$, quæ eſt inſignis proprietas Hyperbolarum intra Aſymtotas deſcriptarum.

164. Quoniam Hyperbola ex duabus partibus diametraliter oppoſitis $IAi$ & $KBk$ conſtat, iſtæ proprietas non ſolum ad eas rectas intra Aſymtotas ductas pertinent, quæ eandem Curvæ partem in duabus punctis interſecant. Sed etiam ad eas, quæ ad partes oppoſitas pertingunt. Ducatur nempe per punctum $M$ recta $Mqrn$ ad partem oppoſitam, cui parallela agatur $Gh$, ac vocetur $Cq = t$ & $qM = u$; erit, ob triangula $CGh$ & $PMq$ ſimilia, $PM = y = \frac{CG}{Gh}u$, & $qP = x - t = \frac{Ch}{Gh}u$; unde fit $x = t + \frac{Ch}{Gh}u$. Cum autem ſit $xy = hh$, fiet $\frac{CG}{Gh}tu + \frac{CG.Ch}{Gh^2}uu = hh$, ſeu $uu + \frac{Gh}{Ch}tu - \frac{Gh^2}{CG.Ch}hh = 0$.

165. Applicata ergo $u$ habebit duplicem valorem, nempe $qM$ & $-qn$, hoc $qn$ exiſtente negativo quia ad alteram partem Aſymtotæ $CP$ pro Axe aſſumtæ vergit. Harum ergo binarum radicum ſumma $qM, -qn$ erit $= -\frac{Gh}{Ch}t = -qr$, ideoque $qn - qM = qr$, unde fit $qM = rn$, & $qn = rM$. Deinde autem ex æquatione inventa intelligitur fore radicum productum $-qM.qn = -\frac{Gh^2}{CG.Ch}hh$, ſeu $qM.qn = qM.rM = rn.qn = rn.rM = \frac{Gh^2}{CG.Ch}hh$. Hæc ergo rectangula, quotcunque rectæ $Mn$ ipſi $Gh$ parallelæ ducantur, perpetuo ejuſdem erunt magnitudinis. Hæ autem ſunt præcipuæ ſingularum ſpecierum Linearum ſecundi ordinis proprietates, quæ, ſi cum proprietatibus generalibus conferantur, infinita fere inſignium proprietatum multitudo conficitur.

Digitized by Google

# CAPUT VII.

## *De ramorum in infinitum excurrentium inveſtigatione.*

166. Si curva Linea quæcunque habeat ramum ſeu partem in infinitum excurrentem, atque ex ejus puncto infinite diſſito ad Axem quemcunque demittatur Applicata normalis; tum, vel Abſciſſa $x$ vel Applicata $y$ vel utraque Coordinata, erit infinita. Niſi enim vel alterutra vel utraque eſſet infinita, tum diſtantia puncti in Curva aſſumti ab initio Abſciſſarum foret finita nempe $= \sqrt{(xx + yy)}$, contra hypotheſin. Quam ob rem, ſi Curva habeat ramum in infinitum excurrentem, vel Abſciſſæ cuipiam finitæ conveniet Applicata realis infinita, vel Abſciſſæ infinite magnæ reſpondebit Applicata realis, ſive finita ſive infinite magna. Ex hoc igitur fonte Curvarum rami in infinitum excurrentes inveſtigari poterunt.

167. Sit propoſita æquatio algebraïca inter Coordinatas $x$ & $y$ cujuſvis ordinis, puta $n$; atque ſeorſim conſiderentur termini, in quibus variabiles $x$ & $y$ obtinent $n$ dimenſiones, qui erunt $\alpha y^n + \beta y^{n-1} x + \gamma y^{n-2} x^2 + \delta y^{n-3} x^3 + \ldots + \zeta x^n$, quæ expreſſio reſolubilis erit in Factores ſimplices formæ $Ay + Bx$, ſive reales ſive imaginarios. Atque, ſi habeat Factores imaginarios, eorum numerus erit par, binique conjuncti dabunt Factorem duplicem realem formæ $A^2 y^2 - 2ABxy \times cof.\, \varphi + B^2 x^2$. Hujuſmodi autem Factor, (ſive $x$ ſive $y$ ſive utraque, ponatur infinita $= \infty$,) ſemper valorem induet infinitum $= \infty^2$, quia terminus $2ABy x.\, cof.\, \varphi$ ſemper minor eſt quam duo reliqui $A^2 y^2 + B^2 x^2$, neque enim $A$ nec $B$ poteſt eſſe $= 0$. Hujuſmodi ergo Factor $A^2 y^2 - 2ABxy.\, cof.\, \varphi +$

$B^2.x^2$, ſi vel $x$ vel $y$ vel utraque ponatur infinita, neque nihilo neque quantitati finitæ, neque etiam quantitati infinitæ $\infty$ poteſt eſſe æqualis, cum ipſa fiat $= \infty^2$, quæ infinities major eſt quam $\infty$.

168. Quod ſi ergo æquationis pars ſumma $\alpha y^n + \beta y^{n-1} x + \gamma y^{n-2} x^2 + \ldots\ldots + \zeta x^n$ nullum habeat Factorem ſimplicem realem, quod quidem evenire non poteſt, niſi $n$ ſit numerus par, tum ex meris Factoribus duplicibus hujus formæ $A^2 y^2 - 2ABxy.\,cof.\,\varphi + B^2 x^2$ conſtabit. Quare, ſi vel $x$ vel $y$ vel utraque ponatur infinita, ipſa illa expreſſio valorem induet infinitum $= \infty^n$: neque igitur quantitati finitæ, neque ulli quantitati infinitæ $\infty^m$, cujus exponens $m$ minor ſit quam $n$, æqualis eſſe poteſt. Reliqua igitur æquationis membra, in quibus variabiles $x$ & $y$ pauciores habent dimenſiones, quoniam infinita præbent minoris exponentis quam $n$, illud ſupremum infinitum adæquare non poſſunt; ideoque æquatio conſiſtere non poteſt, ſi vel $x$ vel $y$ vel utraque ſtatuatur infinita.

169. Hinc ergo linea Curva, quæ exprimitur æquatione inter Coordinatas $x$ & $y$, cujus ſupremum membrum nullos habet Factores ſimplices reales, nullos habebit ramos in infinitum excurrentes, ideoque tota Curva continebitur in ſpatio finito, inſtar Ellipſis ſeu Circuli. Quam ob rem, ſi in æquatione generali ſecundi Ordinis $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$, membrum ſupremum, $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx$, in quo variabiles $x$ & $y$ duas obtinent dimenſiones, non habeat Factores ſimplices reales, quod evenit ſi $\beta\beta$ ſit major quam $4\alpha\gamma$, tum Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, eritque adeo Ellipſis.

170. Quo hæc diſtinctius evolvere liceat, omnem æquationem inter Coordinatas $x$ & $y$ propoſitam, ita in membra

diſtinguamus, ut ad ſupremum ſeu primum referamus omnes æquationis terminos, in quibus variabiles $x$ & $y$ eandem ſummam dimenſionem, cujus exponens ſit $n$, teneant. Ad ſecundum vero membrum refero omnes terminos, in quibus variabiles ambæ $n-1$ dimenſiones conſtituunt. Tertium membrum continebit eos terminos, in quibus ipſorum $x$ & $y$ numerus dimenſionum eſt $n-2$, & ita porro, donec perveniatur ad membrum ultimum, in quo nulla ineſt dimenſio ipſarum $x$ & $y$, & quod propterea ſola quantitate conſtante conſtabit. Sit autem $P$ membrum primum ſeu ſupremum, $Q$ membrum ſecundum, $R$ membrum tertium, $S$ quartum & ita porro. 

171. Quoniam igitur, ſi membrum ſupremum $P$ nullum habet Factorem ſimplicem realem, Linea curva, æquatione $P+Q+R+S+$ &c. $=0$ indicata, nullum habet ramum in infinitum excurrentem; ponamus jam membrum ſupremum $P$ unicum habere Factorem ſimplicem realem, $ay-bx$, ita ut ſit $P=(ay-bx)M$, exiſtente $M$ Functione ipſarum $x$ & $y$, dimenſionum $n-1$, quæ nullos habeat Factores ſimplices reales. Poſita ergo vel $x$ vel $y$ vel utraque infinita, fiet $M=\infty^{n-1}$; $Q$ vero ſimile poterit eſſe infinitum, at $R$, $S$, &c., fient infinita minorum graduum. Conſequenter æquatio $P+Q+R+$ &c. $=0$ poterit ſubſiſtere, ſi fuerit $ay-bx=$ quantitati finitæ, vel nihilo, ideoque Curva in infinitum porrigetur.

172. Sit ergo $ay-bx=p$, exiſtente $p$ quantitate finita, quæ ita debet eſſe comparata ut, Curva in infinitum abeunte, fiat $pM+Q+R+S+$&c.$=0$ ſeu $p=\frac{-Q-R-S\&c.}{M}$. At, cum $M$ ſit quantitas infinita ſuperioris ordinis quam $R$ & $S$ &c., erunt fractiones $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$, &c. $=0$, ideoque $p=\frac{-Q}{M}$. Hanc ob rem fractio $\frac{-Q}{M}$ dabit valorem ipſius $p$, ſi varia-

LIB. II. biles $x$ & $y$ fiant infinitæ. Cum autem ſit $ay - bx = p$, erit $y = \frac{bx+p}{a}$ & $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{p}{ax} = \frac{b}{a}$ ob $\frac{p}{ax} = 0$ ſi $x = \infty$. Curva ergo in infinitum abeunte fit $y = \frac{bx}{a}$.

173. Cum igitur $Q$ & $M$ ſint Functiones homogeneæ $n - 1$ dimenſionum, erit $\frac{-Q}{M}$ Functio nullius dimenſionis, ideoque ſi ponatur $y = \frac{bx}{a}$, præbebit valorem conſtantem pro $p$. Vel, quia Functio $\frac{-Q}{M}$ determinatur, ſi tantum ratio inter $y$ & $x$ determinetur, quæ eſt $b : a$, valor ipſius $p$ obtinebitur ſi in expreſſione $\frac{-Q}{M}$, ubique $b$ loco $y$ & $a$ loco $x$ ſcribatur. Invento ergo hoc modo $p$ erit $ay - bx = p$, quæ æquatio in ipſa æquatione propoſita $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ continetur, ſi Curva abeat in infinitum.

174. Portio itaque Curvæ in infinitum extenſa ipſa exprimetur per hanc æquationem $ay - bx = p$; quæ cum ſit pro Linea recta, hæc Linea recta in infinitum producta tandem cum Linea curva confundetur. Erit ergo Linea recta hæc Curvæ aſymtota, quoniam Linea curva in infinitum porrecta cum recta congruet, ideoque continuo propius ad eam accedet. Atque cum æquatio propoſita $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ poſito $x$ vel $y = \infty$, abeat in æquationem $ay - bx = p$, ſimul intelligitur hanc Lineam rectam utrinque in infinitum productam tandem cum Curva congruere. Quam ob rem Linea curva duos habebit ramos in infinitum excurrentes inter ſe oppoſitos, quorum alter cum iſta Linea recta antrorſum, alter cum eadem retrorſum infinite producta conveniet.

175. Cum igitur Curva, ſi æquationis $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, membrum ſupremum $P$ unicum habeat Factorem ſimplicem realem, prædita ſit duobus ramis in infinitum extenſis, atque ad eandem Lineam rectam utrinque convergentibus, quæ Linea recta ejus Aſymtota vocatur; nunc ponamus ſupre-

mum membrum $P$ duos habere Factores ſimplices reales $ay - bx$  & $cy - dx$, ita ut ſit $P = (ay - bx)(cy - dx)M$, erit $M$ Functio homogenea $n - 2$ dimenſionum. Duo autem caſus hic perpendendi veniunt, prout iſti bini Factores fuerint inter ſe æquales vel inæquales.

176. Sint hi Factores inter ſe inæquales; atque manifeſtum eſt æquationem $(ay - bx)(cy - dx)M + Q + R + S +$ &c. $= 0$, duplici modo ſubſiſtere poſſe, pro Abſciſſis vel Applicatis infinitis, vel ſi $ay - bx$ vel ſi $cy - dx$ æquetur quantitati finitæ. Sit igitur $ay - bx = p$; &, cum $p$ ſit quantitas finita, in infinito erit $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, atque ut ante fiet $p = \frac{-Q - R - S - \&c.}{(cy - dx)M} = \frac{-Q}{(cy - dx)M}$, quæ eſt Functio nullius dimenſionis ipſarum $x$ & $y$; quare, ſi ponatur $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, vel, quod eodem redit, ſi ubique ſcribatur $b$ loco $y$ & $a$ loco $x$, verus prodibit valor conſtantis quæſitæ $p$. Erit ergo $p = \frac{-Q}{(bc - ad)M}$, &, ob Factores inæquales, $bc - ad$ non erit $= 0$, neque etiam $M$, quia nullum omnino Factorem realem ſimplicem complectitur, in nihilum abire poteſt; unde valor pro $p$ oritur finitus, vel etiam $= 0$, quod evenit, ſi vel membrum $Q$ prorſus deſit, vel Factorem habeat $ay - bx$.

177. Ob ſupremi ergo membri $P$ Factorem realem ſimplicem $ay - bx$, Curva, uti in priori caſu, unam habebit Aſymtotam, cujus poſitio indicatur æquatione $ay - bx = p$. Simili vero modo, ob alterum Factorem $cy - dx$, quoque habebit Aſymtotam, quam præbebit æquatio hæc: $cy - dx = q$, exiſtente $q = \frac{-Q}{(ay - bx)M}$, poſtquam ubique loco $y$ & $x$ hi valores determinati $d$ & $c$ fuerint ſubſtituti. Quocirca Linea curva omnino duas habebit Aſymtotas, ideoque quatuor ramos in infinitum extenſos, qui cum illis rectis tandem congruant. Hic ipſe autem caſus locum ſupra invenit in Hy-

Digitized by Google

LIB. II. perbola: quare, ſi in æquatione pro Lineis ſecundi ordinis $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0$ ſupremum membrum $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx$ duos habeat Factores ſimplices inæquales reales, quod evenit ſi $\beta\beta$ ſuperet $4\alpha\gamma$, tum Curva erit Hyperbola.

178. Sint ambo Factores $ay - bx$ & $cy - dx$ inter ſe æquales ita ut ſit $P = (ay - bx)^2 M$. Cum igitur ſit $P + Q + R + S + \&c. = 0$, erit $(ay - bx)^2 = \frac{-Q - R - S \, \&c.}{M}$. Quia autem eſt $Q$ Functio $n - 1$; $R$ $n - 2$; & $S$ Functio $n - 3$ dimenſionum, ob $M$ Functionem $n - 2$ dimenſionum erit, caſu infiniti, $\frac{S}{M} = 0$, ideoque $(ay - bx)^2 = \frac{-Q}{M} - \frac{R}{M} = \frac{-Q}{M(\mu y + \nu x)}(\mu y + \nu x) - \frac{R}{M}$. At eſt $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)}$ & $\frac{R}{M}$ Functio nullius dimenſionis ipſarum $x$ & $y$. Quare, cum in infinito ſit $y : x = b : a$, ſi hæc ratio $\frac{b}{a}$ pro $\frac{y}{x}$ ſeu $b$ pro $y$ & $a$ pro $x$ ſubſtituatur, utraque illa Functio abibit in quantitatem conſtantem.

179. Fiat ergo, facta hac ſubſtitutione, $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)} = A$ & $\frac{R}{M} = B$; eritque $(ay - bx)^2 = - A(\mu y + \nu x) - B$, quæ eſt æquatio pro Linea curva cum qua Linea curva æquatione $P + Q + R + S + \&c. = 0$ expreſſa, poſtquam in infinitum proceſſerit, confundetur. Verum, quia quantitates $\mu$ & $\nu$ ſunt arbitrariæ ſumatur $\mu = b$ & $\nu = a$, ac, immutandis Coordinatis, fiat $ay - bx = u\sqrt{(aa + bb)}$ & $by + ax = t\sqrt{(aa + bb)}$, eritque pro eadem illa Curva iſta æquatio $uu + \frac{At}{\sqrt{(aa + bb)}} + \frac{B}{aa + bb} = 0$, quam patet eſſe pro Parabola. Curva ergo quæſita ita erit comparata, ut in infinitum protenſa cum Parabola confundatur. Habebit ergo duos tantum ramos

Digitized by Google

ramos in infinitum excurrentes, quorum Aſymtota non erit Linea recta, ſed Parabola ſuperiore æquatione expreſſa. 

180. Evenit hoc ſi non fuerit $A = o$ : at ſi ſit $A = o$ (quod evenit ſi membrum ſecundum $Q$ vel deſit vel diviſibile fuerit per $ay - bx$, tum æquatio ceſſat eſſe pro Parabola, eritque $uu + \frac{B}{aa + bb} = o$, cujus tres caſus erunt evolvendi. Primo ſcilicet, ſi $B$ fuerit quantitas negativa, puta $\frac{B}{aa + bb} = -ff$, æquatio $uu - ff = o$, duas in ſe complectetur æquationes $u - f = o$ & $u + f = o$, quæ erunt pro duabus Lineis rectis inter ſe parallelis, quarum utraque erit Curvæ Aſymtota, uti caſu primo: atque ideo Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes qui cum iſtis duabus rectis confundentur.

181. Secundus caſus eſt quod ſit $B$ quantitas affirmativa, puta $+ff$. Quia vero hoc caſu æquatio $uu + ff = o$ eſt impoſſibilis, Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, ſed tota in ſpatio finito continebitur. Non ſolum igitur Curva, quæ hac æquatione $P + Q + R + S +$ &c. $= o$, continetur, nullum habebit ramum in infinitum extenſum, ſi membrum ſupremum $P$ nullum habeat Factorem ſimplicem realem, ſed etiam idem uſu venire poteſt, quamvis $P$ habeat Factores, uti modo vidimus. Plures autem hujuſmodi caſus adhuc occurrent.

182. Tertius caſus eſt quo ſit etiam $B = o$, in quem uterque præcedentium incidere poteſt, ex quo ambiguum eſt, quomodo Curva futura ſit comparata. Hinc ad figuram Curvæ definiendam ſequentes termini ſpectari debebunt. Scilicet, cum ſit $P + Q + R + S +$ &c. $= o$, atque $P = (ay - bx)^2 M$, in infinito erit $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$; & $(ay - bx)^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \frac{T}{M} +$ &c.. Ponatur ergo, ut ante, facta ſubſtitutione $\frac{y}{x} =$

LIB. II. $\frac{b}{a}$, $\frac{Q}{M} = A(by + ax)$, $\frac{R}{M} = B$; tum vero cum $S$, $T$, $V$, &c., ſint Functiones $(n-2)$, $(n-3)$, &c. dimenſionum, exiſtente $M$ Functione $(n-1)$ dimenſionum, $\frac{S(by+ax)}{M} = C$; $\frac{T(by+ax)^2}{M} = D$; $\frac{V(by+ax)^3}{M} = E$ &c., erit $(ay-bx)^2 + A(by+ax) + B + \frac{C}{by+ax} + \frac{D}{(by+ax)^2} + \frac{E}{(by+ax)^3} +$ &c. $= 0$. Hæc ergo æquatio exprimit naturam curvæ Lineæ, cujus portio in infinitum diſtans, quæ prodit ſi $by + ax$ ponatur infinitum, conveniet cum Curva in æquatione $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, contenta. Quamvis enim, Curva in infinitum excurrente, $(ay-bx)^2$ valorem obtineat vel finitum vel infinitum ordinis tamen inferioris quam $\infty^2$, tamen $by + ax$ valorem habebit infinitum.

183. Mutemus autem Axem, ad quem Lineam iſtam Aſymtotam inventam referamus, ac in eo ponamus Abſciſſam $\frac{ax+by}{\surd(aa+bb)} = t$, & Applicatam, $\frac{ay-bx}{\surd(aa+bb)} = u$; ſitque, brevitatis gratia, $\surd(aa+bb) = g$, atque erit æquatio $uu + \frac{At}{g} + \frac{B}{gg} + \frac{C}{g^3t} + \frac{D}{g^4tt} + \frac{E}{g^5t^3} +$ &c. $= 0$. Cum igitur in caſu, quem evolvere debemus, ſit $A = 0$, & $B = 0$, ſiet $uu + \frac{C}{g^3t} + \frac{D}{g^4tt} + \frac{E}{g^5t^3} +$ &c. $= 0$. Quod, ſi jam non fuerit $C = 0$, poſito $t$ infinito, termini $\frac{D}{g^4tt} + \frac{E}{g^5t^3} +$ &c., præ $\frac{C}{g^3t}$ evaneſcent, eritque $uu + \frac{C}{g^3t} = 0$; qua æquatione natura Lineæ curvæ continetur, quæ, poſito $t = \infty$, cum Curva quæſita confundetur. Quare, cum hinc ſit $u = \pm\surd\frac{-C}{g^3t}$ Curva duos habebit ramos ad eamdem Axis partem utrinque convergentes.

184. Quod ſi inſuper fuerit $C = 0$, tum ſumenda eſt iſta

æquatio $uu + \frac{D}{g^4tt} = 0$, ubi iterum tres caſus occurrunt prout $D$ fuerit quantitas affirmativa, vel negativa, vel nulla. Primo caſu, ob æquationem impoſſibilem, Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, ſed tota continebitur in ſpatio finito. Secundo caſu, ſi $\frac{D}{g^4} = -ff$ ob $uu = \frac{ff}{tt}$; quia poſito tam $t = +\infty$ quam $t = -\infty$, Applicata $u$ duplicem obtinet valorem evaneſcentem, affirmativum & negativum, Curva habebit quatuor ramos ad Axem utrinque ad utramque partem convergentes. Tertio autem caſu, quo $D = 0$, ſumenda eſt æquatio $uu + \frac{E}{g^5t^3} = 0$, cujus par eſt ratio, atque in §. præcedente: ſicque conſideratio continuari debebit, quoad æquatio $P + Q + R + S +$ &c., terminos ulteriores ſuppeditat.

185. Ponamus nunc membrum ſupremum $P$ æquationis $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, tres habere Factores ſimplices reales; atque manifeſtum eſt, ſi iſti Factores fuerint inter ſe inæquales, tum de unoquoque valere ea, quæ ſupra de unico Factore reali ſunt expoſita; quo ergo caſu Curva habebit ſex ramos in infinitum excurrentes, ad tres Lineas rectas Aſymtotas convergentes. Si bini Factores fuerint æquales, tum de tertio inæquali idem erit tenendum; quod ante: at de duobus æqualibus eadem præcepta ſunt notanda, quæ ante dedimus. Tantum ergo ſupereſt caſus tertius evolvendus, quo omnes tres Factores ſunt inter ſe æquales. Sit igitur $P = (ay - bx)^3 M$. Et, quia æquatio $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, ſubſiſtere non poteſt in infinito, niſi $(ay - bx)^3$ habeat valorem vel finitum, vel infinitum quidem at ordinis inferioris quam $\infty^3$, quo poteſtas infiniti, in quam membrum ſupremum $P$ abit, fiat minor quam $\infty^n$; erit utique in infinito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.

186. Ad hunc caſum exponendum primum ſpectari oportet membrum ſecundum $Q$, utrum id Factorem habeat eundem $ay - bx$ an ſecus: ubi notandum eſt ſi omnino deſit, tum

Lib. II. in priori contineri, quia nihilum quemcunque Factorem agnoſcit. Primum itaque non ſit $Q$ per $ay - bx$ diviſibile. Et, cum $Q$ ſit Functio $n - 1$ dimenſionum, $M$ vero Functio $n - 3$ dimenſionum, erit $\frac{Q}{(ax+by)^2 M}$ Functio nullius dimenſionis, ideoque poſito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, abibit in quantitatem conſtantem, quæ ſit $= A$, eritque $(ay - bx)^2 + A(ax + by)^2 = 0$, ſequentia enim membra præbebunt terminos, qui in infinito præ $A(ax + by)^2$ evaneſcunt.

187. Linea igitur curva, quæ hac æquatione exprimitur, ita erit comparata, ut in infinitum producta cum Linea curva æquatione $P + Q + R + S + \&c.$, expreſſa congruat. Ad illam autem proprius cognoſcendam, eam ad illum Axem referamus, in quo ſit Abſciſſa $t = \frac{ax+by}{g}$ & Applicata $u = \frac{ay-bx}{g}$ poſito $\sqrt{(aa+bb)} = g$, eritque $u^2 + \frac{Att}{g} = 0$, quæ æquatio, ſi ponatur $t = \infty$, dabit partem Curvæ quæſitæ $P + Q + R + \&c. = 0$, in infinito exiſtentem. Quare, ſi figura Curvæ $u^2 + \frac{Att}{g} = 0$, cognita fuerit, ſimul Curvæ $P + Q + R + \&c. = 0$, portionis infinitæ figura erit cognita. In capite autem ſequente has Lineas curvas Aſymtotas data opera evolvemus.

188. Quod ſi membrum ſecundum $Q$ Factorem habeat $ay - bx$; vel ſimul erit diviſibile per $(ay - bx)^2$ vel ſecus. Ponamus non eſſe diviſibile per $(ay - bx)^2$, ac ſumatur iſta Functio nullius dimenſionis $\frac{Q}{(ay-bx)(ax+by)M}$, quæ, poſito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, præbeat iſtam quantitatem conſtantem $A$, eritque $(ay - bx)^2 + A(ay - bx)(ax + by) + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \&c. = 0$. Hic erit $\frac{R}{M}$, poſito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ vel $B(ay - bx)$ vel

$B(ax+by)$, prout $R$ fuerit per $ay-bx$ diviſibile vel minus ; verum $\frac{S}{M}$ erit quantitas conſtans $C$. Hinc, iſta æquatione ad alium Axem relata, inter Coordinatas $t$ & $u$, ut ante fecimus, ea erit vel $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bu}{gg} + \frac{C}{g^3} = 0$, vel $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bt}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$. Quia autem tantum caſus huc ſpectat cum $t = \infty$, termini ultimi evaneſcunt. Eritque ergo priori caſu $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bu}{gg} = 0$, quæ duplicem præbet Aſymtotam nempe & $u = 0$, & $uu + \frac{At}{g} = 0$, alteram rectam, alteram Parabolam. Poſteriori caſu quoque, exiſtente $t = \infty$, vel $u$ habebit valorem finitum, eritque, ob finita præ infinitis evaneſcentia, $\frac{Atu}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$, ideoque $u = \frac{-B}{Ag}$ pro Linea recta. Præterea vero $u$ valorem infinitum habere poterit ; ſicque, avaneſcente termino tertio, fiet $u^2 + \frac{At}{g} = 0$, pro Parabola. Quare utroque caſu duplex prodit Aſymtota, altera recta altera Parabola, ex quo hos caſus a ſe diſtingui non opus eſt.

189. Sit $Q$ etiam per $(ay-bx)^2$ diviſibile, atque prout $R$ per $(ay-bx)$ fuerit diviſibile vel ſecus, iiſdem, quibus ante, operationibus inſtitutis, prodibunt inter $t$ & $u$ hæ æquatioues : vel $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, vel $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$. Prior caſus eſt pro tribus Lineis rectis inter ſe parallelis, ſi quidem omnes æquationis $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$ radices fuerint reales, vel pro unica recta Aſymtota, ſi duæ radices fuerint imaginariæ. Hinc vero varietates naſcuntur prout trium iſtarum Aſymtotarum inter ſe parallelarum vel

Digitized by Google

LIB. II. binæ vel omnes coincidunt. Poſterior autem caſus $u^3 + \frac{Au}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$, poſito $t = \infty$, locum habere nequit niſi $u$ ſit infinitum, ideoque terminus $\frac{Au^3}{g}$ præ primo $u^3$ evaneſcet, eritque $u^3 + \frac{Bt}{g^2} = 0$, æquatio pro Aſymtota curvilinea ordinis tertii.

190. Sin autem fuerit $A = 0$, $B = 0$, & $C = 0$, tum recurrendum eſt ad terminos æquationis $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ ſequentes, qui præbebunt hujuſmodi æquationem $u^3 + \frac{D}{g^4 t} + \frac{E}{g^5 t^2} + \frac{F}{g^6 t^3} +$ &c. $= 0$, in qua, niſi ſit $D = 0$, tertius cum ſequentibus evaneſcit, ut ſit $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$; ſin & $D = 0$, erit $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$; &, ſi etiam $E = 0$, erit $u^3 + \frac{F}{g^6 t^3} = 0$, &c., quæ æquationes Lineas curvas denotant, quæ, poſito $t = \infty$, cum Curva in æquatione $P + Q + R +$ &c. $= 0$, contenta congruant. Iſtæ autem æquationes, quia ineſt poteſtas impar $u^3$, ſemper ſunt reales, ideoque certo ramos in infinitum excurrentes, declarant. Interim tamen pro his iiſdem caſibus Linea recta æquatione $u = 0$, expreſſa quoque erit Aſymtota, quia eſt Aſymtota Curvarum $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$, $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$ &c.

191. Cum igitur rami Curvarum ad Aſymtotam rectam convergentes tantopere diſcrepare queant, convenit hanc diverſitatem diligentius perpendere, quod fiet, ſi Linea curva ſimpliciſſima definiatur, quæ ad eandem Aſymtotam rectam relata cum Curva propoſita confundatur. Sic, etſi æquatio $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, ſi radices omnes habeat reales, tres oſtendit Aſymtotas rectas inter ſe parallelas, tamen nondum

Digitized by Google

patet utrum crura Curvæ in infinitum extenſa ſint Hyperbolica, hoc eſt æquatione $u = \frac{C}{t}$ expreſſa, an alius generis, veluti æquatione $u = \frac{C}{tt}$, vel $u = \frac{C}{t^3}$ &c., expreſſa. Ad hoc cognoſcendum ſumatur ſequens proximus terminus quem æquatio ſuggerit, nempe $\frac{D}{g^3 t}$, vel, ſi hic deſit, $\frac{E}{g^3 t^3}$, vel etiam, hoc deficiente, $\frac{F}{g^3 t^3}$. Sumamus, ut rem generaliter abſolvamus, terminum ſequentem eſſe $\frac{K}{t^k}$: atque ex natura æquationis $P + Q + R +$ &c. $= 0$, quæ eſt $n$ dimenſionum, patet $k$ non poſſe eſſe numerum majorem quam $n - 3$. Sint æquationis $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, radices ſeu Factores $(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)$, eritque $(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma) - \frac{K}{t^k} = 0$. Sit $u - \alpha = \frac{I}{t^\mu}$, quæ æquatio exprimet naturam unius Aſymtotæ, eritque $\frac{I}{t^\mu}(\alpha - \beta + \frac{I}{t^\mu})(\alpha - \gamma + \frac{I}{t^\mu}) = \frac{K}{t^k}$; &, poſito $t$ infinito, fit $\frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) I}{t^\mu} = \frac{K}{t^k}$.

192. Æquatio hæc obtinet, ſi radix $\alpha$ fuerit inæqualis reliquis radicibus $\beta$ & $\gamma$, hocque caſu fiet $I = \frac{K}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$ & $\mu = k$, unde radix $u = \alpha$ ſuppeditabit iſtam Aſymtotam Curvilineam $u - \alpha = \frac{K}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)t^k}$. Si ergo omnes tres radices fuerint inter ſe inæquales ſingulæ hujuſmodi Aſymtotas præbebunt. Sin autem duæ radices ſint æquales,

CAP. VII.

LIB. II. puta $\beta = \alpha$, binæ Aſymtotæ coaleſcent in unam, eritque $\frac{\Gamma(\alpha-\gamma)}{t^{2\mu}} = \frac{K}{t^k}$, unde fit $\Gamma = \frac{K}{\alpha-\gamma}$ & $2\mu = k$. Quare hujus duplicis Aſymtotæ natura exprimetur hac æquatione $(u-\alpha)^2 = \frac{K}{(\alpha-\gamma).t^k}$. Si omnes tres radices fuerint æquales, ideoque tres Aſymtotæ in unam concreſcant, ejus natura exprimetur hac æquatione $(u-\alpha)^3 = \frac{K}{t^k}$.

193. Quod ſi æquationis $P+Q+R+S+$ &c., ſupremum membrum $P$ quatuor habeat Factores ſimplices reales, ſi ii fuerint vel omnes inæquales inter ſe, vel bini æquales, vel etiam tres æquales, ex antecedentibus natura ramorum in infinitum excurrentium una cum Aſymtotis colligetur. Unicus ergo caſus, quo omnes radices ſunt inter ſe æquales, explanatione indiget. Sit igitur $P=(ay-bx)^4 M$, ut ſit $M$ Functio $n-4$ dimenſionum; atque, ſi in Functionibus nullius dimenſionis, uti ſupra, ponatur $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, ut præbeant quantitates conſtantes, ſimulque ponatur, mutato Axe, $t=\frac{ax+by}{g}$ & $u=\frac{ay-bx}{g}$, exiſtente $g=\sqrt{(aa+bb)}$, pro Lineis Aſymtotis ſequentes inter $t$ & $u$ orientur æquationes. Primum ſcilicet, ſi $Q$ non fuerit diviſibile per $ay-bx$, habebitur $u^4+\frac{At^3}{g}=0$.

194. Deinde, ſi $Q$ ſit diviſibile quidem per $(ay-bx)$ at non per $(ay-bx)^2$, prodibit $u^4+\frac{Attu}{g}+\frac{Btt}{gg}=0$, in qua, poſita $t=\infty$, Applicata $u$ poteſt eſſe vel quantitas finita vel infinita, ergo duplex prodit Aſymtota, recta ſcilicet $u+\frac{B}{gA}=0$, & Curva $u^3+\frac{Att}{g}=0$. Quod ad rectam attinet, ad eam propius cognoſcendam ſumatur terminus ſequens proximus,

Digitized by Google

ximus, qui ſit $\frac{K}{t^k}$, ac reperietur $u + \frac{B}{gA} + \frac{gK}{At^{k+2}} = 0$, 
quæ eſt æquatio pro Curva, cujus pars reſpondens Abſciſſæ $t = \infty$ cum Curva quæſita confundetur.

195. Sit nunc $Q$ diviſibile per $(ay - bx)^2$ at non per $(ay - bx)^3$, videndum eſt utrum $R$ ſit diviſibile per $ay - bx$ an ſecus. Priori caſu prodibit $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btu}{gg} + \frac{Ct}{g^3} = 0$; poſteriori vero $u^4 + \frac{Atu}{g} + \frac{Btt}{gg} + \frac{Ct}{g^3} = 0$. Prior caſus duplicem dat æquationem, prout $u$ eſt finitum aut infinitum, ideoque reſolvitur in has duas æquationes $uu + \frac{Bu}{gA} + \frac{C}{ggA} = 0$, & $u^2 + \frac{At}{g} = 0$; quarum illa, ſi radices habet ambas reales & inæquales, præbet duas rectas parallelas, ſin autem radices ſint imaginariæ, nullum oſtendit ramum in infinitum excurrentem: hæc vero $u^2 + \frac{At}{g} = 0$, dat Parabolam Aſymtotam. Poſterior æquatio $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$, (ob evaneſcentem $\frac{Ct}{g^3}$ præ $\frac{Btt}{gg}$, facto $t = \infty$,) duas continet æquationes formæ $uu + \alpha t = 0$, ideoque duæ prodeunt Parabolæ Aſymtotæ, ſi fuerit $A^2$ major quam $4B$, quæ in unam coeunt ſi $A^2 = 4B$, at penitus imaginariæ evadunt ſi $A^2$ minor quam $4B$, quo caſu nullus Curvæ ramus in infinitum excurrens deſignatur.

196. Sit jam $Q$ diviſibile per $(ay - bx)^3$; atque, prout $R$ & $S$ fuerint diviſibilia vel non per $ay - bx$, obtinebuntur ſequentes æquationes.



Digitized by Google

LIB. II.

$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Cu}{g^3} + \frac{D}{g^4} = 0$$
$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$$
$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{But}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$$
$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$$

Harum æquationum prima eſt pro quatuor rectis inter ſe parallelis, ſi quidem omnes radices fuerint reales & inæquales, radices autem æquales duas pluresve in unam colligent. At vero radices imaginariæ penitus vel duas omnes e medio tollunt. In æquatione ſecunda, ob $t = \infty$, Applicata $u$ non poteſt non eſſe infinita, eritque ergo $u^4 + \frac{Ct}{g^3} = 0$, Aſymtota Curva quarti ordinis. Ex æquatione tertia finitum valorem habere poteſt $u + \frac{C}{gB} = 0$, præterea vero habet hanc $u^2 + \frac{Bt}{gg} = 0$, Lineam tertii ordinis pro Aſymtota. Denique æquatio quarta, ob $u$ infinitum ſi $t = \infty$, abit in $u^4 + \frac{Btt}{gg} = 0$, quæ æquatio, ſi $B$ eſt quantitas affirmativa, eſt impoſſibilis, ſin negativa deſignat duas Parabolas ad Verticem oppoſitas, quæ in infinitum productæ cum Curva confunduntur.

197. Ex his igitur jam via patet, qua ulterius progredi licet, ſi plures Factores ſimplices ſupremi membri $P$ inter ſe fuerint æquales. Quod enim ad Factores inæquales attinet, eorum quiſque ſeorſim conſiderari atque Linea recta Aſymtota ex eo nata definiri poteſt. Sin autem duo Factores fuerint æquales, tum per ea, quæ §. §. 178. & *ſequentibus* ſunt tradita, indoles Curvæ definiri poteſt; Similique modo pro tribus Factoribus æqualibus negotium conficient §. §. 185. & *ſequentes*; atque caſum, quo quatuor Factores ſunt æquales, modo

evolvimus, ex quo ſimul plurium Factorum æqualitas tractari poteſt. Ceterum, hinc perſpicitur quanta multiplicitas ac varietas in Lineis curvis tantum ratione ramorum in infinitam excurrentium locum habere queat; varietatem enim, quæ in ſpatio finito ineſſe poteſt, nondum attigimus. 

---

## CAPUT VIII.

### *De Lineis Aſymtotis.*

198. In Capite præcedente vidimus plures dari Aſymtotarum ſpecies, præter Lineam rectam enim invenimus plures Lineas curvas Aſymtotas hac æquatione $u^{\mu} = Ct^{\nu}$ expreſſas. Atque ipſa Linea recta ſuppeditavit alias Aſymtotas Curvilineas, cum quibus Linea curva magis convergat, quam cum Linea recta. Quoties autem Linea recta reperitur eſſe Aſymtota cujuſpiam Curvæ, toties Linea curva eandem rectam pro Aſymtota habens aſſignari poterit, quæ etiam ſit Aſymtota Curvæ propoſitæ. Hujuſmodi autem Aſymtota Curvilinea multo accuratius exprimit indolem Curvæ, cujus eſt Aſymtota; oſtendit enim ſimul ramorum numerum cum recta convergentium, atque plagam, utrum ſupra an infra, an antrorſum retrorſumve ad rectam appropinquent.

199. Hæc igitur infinita Aſymtotarum varietas commodiſſime in ordinem digeretur, ſi ipſum fontem, unde eas ſumus adepti, ſequamur. Alias ſcilicet Aſymtotas præbent ſinguli membri ſupremi Factores inter ſe inæquales, alias bini Factores æquales, alias terni æquales, alias quaterni, & ita porro. Sit itaque propoſita æquatio cujuſque ordinis $n$ inter Coordinatas $x$ & $y$, quæ ſit $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, ubi $P$ ſit membrum ſupremum continens omnes terminos $n$ dimenſionum, $Q$ ſit membrum ſecundum continens terminos $n - 1$

LIB. II. dimenſionum, ſimilique modo $R$ tertium, $S$ quartum, & ita porro.

TAB. X. Fig. 35. 200. Sit jam $ay-bx$ Factor ſimplex ipſius $P$, cui alius ſimilis non adſit; ac ponatur $P=(ay-bx)M$, eritque $M$ Functio homogenea $n-1$ dimenſionum non diviſibilis per $ay-bx$. Sit nimirum $AZ$ Axis, in quo ſit Abſciſſa $AP=x$ & Applicata $PM=y$. Quo Factor $ay-bx$ ſuccinctius exprimatur, ſumatur alia recta $AX$ pro Axe ſecans priorem in ipſo Abſciſſarum initio $A$ & faciens angulum $XAZ$, cujus tangens $=\frac{b}{a}$, ideoque ſinus $=\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & coſinus $=\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$. In hoc Axe ponatur Abſciſſa $AQ=t$, & Applicata $QM=u$; erit, ductis $Pg$, $Pf$ novis Coordinatis $u$ & $t$ parallelis, $Pg=Qf=\frac{bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Ag=\frac{ax}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Mf=\frac{ay}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Pf=Qg=\frac{by}{\sqrt{(aa+bb)}}$; ideoque $t=Ag+Qg=\frac{ax+by}{\sqrt{(aa+bb)}}$; & $u=Mf-Qf=\frac{ay-bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Erit ergo nunc Applicata $u$ Factor ſupremi membri $P$.

201. Ex his erit viciſſim $y=\frac{au+bt}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & $x=\frac{at-bu}{\sqrt{(aa+bb)}}$; qui valores ſi in æquatione $P+Q+R+$ &c. $=0$, ſubſtituantur, prodebit æquatio pro Curva eadem ad Axem $AX$ relata, inter $t$ & $u$. Ut autem coëfficientium multitudinem evitemus, ſuſtineant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, &c. loca omnium coëfficientium; ac, facta ſubtitutione, ſingulæ litteræ ſequentes valores induent.

Digitized by Google

$$M = \alpha t^{n-1} + \alpha t^{n-2} u + \alpha t^{n-3} u^2 + \&c.$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2} u + \beta t^{n-3} u^2 + \&c.$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \&c.$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \&c.$$
$$T = \epsilon t^{n-4} + \epsilon t^{n-5} u + \epsilon t^{n-6} u^2 + \&c.$$
&c.

Quia autem, ad Aſymptotam inveniendam, Abſciſſam $t$ infinitam ſtatui oportet in quovis membro omnes termini præ primo evaneſcent. Quare, ſi cujuſvis terminus primus adſit, ſequentes negligi poſſunt; ſin primus deſit, capiatur ſecundus; ſin primus & ſecundus deſint, a tertio erit incipiendum.

202. Quia $u$ non dividit Functionem $M$, ejus primus terminus deeſſe non poteſt: fiet ergo $\alpha t^{n-1} u + \beta t^{n-1} = 0$, unde pro $u$ oritur valor finitus, qui ſit $= c$: hoc eſt recta Axi $AX$ parallela ab eoque intervallo $c$ diſtans erit Aſymtota. Jam, ad Aſymtotam curvilineam magis ad ipſam Curvam accedentem, inveniendam, ponatur ubique, præterquam in primo termino, $u = c$, ac reperietur hæc æquatio $\alpha t^{n-1} u + \beta t^{n-1} + t^{n-2} (\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3} (\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0$; vel, ob $\alpha u + \beta = u - c$, erit $(u-c) t^{n-1} + t^{n-2} (\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3} (\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0$. Niſi jam terminus ſecundus deſit, omnes ſequentes negligi poſſunt, fietque $(u - c) + \frac{A}{t} = 0$; ſi ſecundus deſit, tertius ſumatur, eritque $(u - c) + \frac{A}{tt} = 0$. Tertio vero etiam deficiente, fiet $(u - c) + \frac{A}{t^3} = 0$, & ita porro. Si omnes, præter ultimum conſtantem, deficiant, erit

Digitized by Google

Lib. II. $(u-c)+\frac{A}{t^{n-1}}=0$. Prorſus autem omnes ſi deeſſent, tota æquatio diviſibilis foret per $u=c$, ideoque ipſa recta $u-c=0$, foret Curvæ portio.

203. Si ponatur $u-c=z$; ſeu, ſi Abſciſſæ in ipſa Aſymtota recta capiantur, omnes Aſymtotæ curvilineæ, quas unicus ſupremi membri Factor ſuppeditat, in hac æquatione generali comprehenduntur $z=\frac{C}{t^k}$, denotante $k$ numerum quemvis integrum exponente $n$ minorem. Quemadmodum ergo hæ Aſymtotæ curvilineæ ſint comparatæ, ſi Abſciſſa $t$ ponatur infinita, videamus. Sit ergo $XY$ Aſymtota recta pro Axe ſumta, & $A$ initium Abſciſſarum; ducta recta $CD$ orientur quatuor regiones, quas litteris P, Q, R & S deſignemus. Sit nunc primum $z=\frac{C}{t}$: &, quia ſumptos $t$ negativo, fit $z$ quoque negativa, Curva duos habebit ramos $EX$ & $FY$ in regionibus oppoſitis P & S ad rectam $XY$ convergentes. Idem eveniet, ſi $k$ fuerit numerus quicunque impar. At, ſi fuerit $k=2$, ſeu $z=\frac{C}{tt}$, quia, ſive $t$ ſtatuatur affirmativa ſive negativa, $z$ perpetuo affirmativa manet, Curva conſtabit duobus ramis $EX$ & $FY$ in regionibus P & Q ad rectam $XY$ convergentibus; quod idem contingit, ſi $k$ fuerit numerus par quicunque, hoc tantum diſcrimine, quod convergentia eo fiat promptior, quo major ſit exponens $k$.

Tab. X. Fig. 36.

Tab. X. Fig. 37.

204. Habeat ſupremum membrum $P$ binos Factores $ay-bx$ inter ſe æquales; atque facta eadem, qua ante, ad alium Axem tranſlatione, fiet

Digitized by Google

$$P = \quad + \alpha t^{n-2} u^2 + \alpha t^{n-3} u^3 + \&c.$$ CAP. VIII.

$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2} u + \beta t^{n-3} u^2 + \beta t^{n-4} u^3 + \&c.$$

$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \gamma t^{n-5} u^3 + \&c.$$

$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \delta t^{n-6} u^3 + \&c.$$

&c.

Hinc, prout primus membri *Q* terminus affuerit, ſive minus, duæ oriuntur æquationes

I.

$$\alpha t^{n-2} u^2 + \beta t^{n-1} = 0$$

ſeu

$$\alpha u^2 + \beta t = 0$$

II.

$$\alpha t^{n-2} u^2 + \beta t^{n-2} u + \gamma t^{n-2} = 0$$

ſeu

$$\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0.$$

Quod ſi ergo prima æquatio $\alpha u^2 + \beta t = 0$, locum habet, Aſymtota fit Parabola, cum cujus ambobus ramis duo Curvæ rami in infinito confundentur. Curva ergo in binis regionibus P & R ramos habebit cum Parabola *EAF* denique congruentes. TAB. X. *Fig.* 38.

205. Sin autem altera æquatio $\alpha uu + \beta u + \gamma = 0$, reſultet, tum videndum eſt an habeat duas radices reales an ſecus. Poſteriori caſu enim hac æquatione nulli prorſus rami in infinitum excurrentes denotantur. Sint ergo ambæ radices reales & inæquales, altera $u = c$, altera $u = d$, atque Curva duas habebit Aſymtotas rectas inter ſe parallelas. Cujuſnam vero utraque ſit indolis, ut ante, inveſtigabimus; ſcilicet cum ſit $\alpha uu + \beta u + \gamma = (u - c)(u - d)$, ponatur ubique $u = c$, præterquam in Factore $u - c$, ac prodibit $(c - d) t^{n-2}$

Digitized by Google

$(u-c)+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon)+\&c.=0$. Niſi ergo ſecundus terminus evaneſcat, ſequentes omnes, poſito $t=\infty$, evaneſcent, eritque Aſymtota $(u-c)+\frac{A}{t}=0$; ſi terminus ſecundus evaneſcat, fiet $(u-c)+\frac{A}{t^2}=0$, atque ita porro. Si omnes termini, præter ultimum conſtantem, fuerint $=0$, erit $(u-c+\frac{A}{t^{n-2}}=0$, quarum Curvarum figuras ſi $t=\infty$, jam ſupra omnes deſcripſimus.

206. At, ſi ambæ radices æquationis $\alpha uu+\beta u+\gamma=0$. fuerint æquales, ſeu $\alpha uu+\beta u+\gamma=(u-c)^2$, quia $u=c$, ſi hic valor in reliquis terminis ſubſtituatur, prodibit iſta æquatio, $t^{n-2}(u-c)^2+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon)+\&c.=0$: unde, prout, excepto primo, vel non deſit ſecundus, vel non deſit tertius deficiente primo, vel non quartus deficientibus ſecundo & tertio, ſequentes oriuntur æquationes pro Aſymtotis;

$$(u-c)^2+\frac{A}{t}=0;$$
$$(u-c)^2+\frac{A}{tt}=0;$$
$$(u-c)^2+\frac{A}{t^3}=0;$$

uſque ad

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^{n-2}}=0;$$

Si omnes termini præter ultimum conſtantem deſint. Verum ſi etiam ultimus evaneſceret, foret $(u-c)^2=0$, ideoque Linea recta ipſa foret Curvæ portio, Curvaque adeo complexa.

207. Quanquam ſic omnes caſus, quos duo Factores æquales præbeant,

præbeant, enumerati videntur, tamen ultima æquatio alias adhuc induere poteſt formas, unde diverſæ Aſymtotæ ſequuntur. Evenit hoc, ſi Factor poteſtatis $t^{n-3}$ per $u-c$ diviſibilis deprehendatur: tum enim, uti in primo termino, relinquatur $u-c$ ac adjiciatur inſuper terminus ſequens qui proxime adeſt, hocque caſu ejuſmodi emergent æquationes CAP. VIII.

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{tt}=0$$
$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^3}=0$$
uſque ad
$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

Sin autem ſecundus terminus penitus deſit, vel per $(u-c)^2$ diviſibilis fuerit, tum ſpectetur terminus tertius, qui ſi per $u-c$ diviſibilis deprehendatur, in eo $u-c$ relinquatur, atque præterea ſequens proximus terminus adjungatur. Hocque caſu ejuſmodi orientur æquationes

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^3}=0$$
$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^4}=0$$
uſque ad
$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

Quod ſi etiam tertius terminus deſit, & quartus per $u-c$ diviſibilis reperiatur, vel etiam hoc deficiente quintus, & ita porro, naſcetur hujuſmodi æquatio pro Curva Aſymtota,

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0,$$

 ubi exponens $p$ ſemper minor erit quam $q$, & $q$ minor quam $n-1$.

208. Ponamus $u - c = z$, atque hæ æquationes omnes in hac forma $zz - \frac{Az}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$, continentur. Ad quam evolvendam tres caſus ſunt ſpectandi, prout fuerit $q$ major quam $2p$, vel $q$ æqualis $2p$, vel $q$ minor quam $2p$.

Caſu primo, quo $q$ ſuperat $2p$; duæ æquationes in illa continentur, $z - \frac{A}{t^p} = 0$, & $Az - \frac{B}{t^{q-p}} = 0$: utraque enim, facto $t = \infty$, ſatisfacit. Nam, poſito $z = \frac{A}{t^p}$, æquatio ſuperior abit in $\frac{A^2}{t^{2p}} - \frac{AA}{t^{2p}} + \frac{B}{t^q}$, ſeu $A^2 - A^2 + \frac{B}{t^{q-2p}} = 0$, quod, ob $q$ majorem quam $2p$, verum eſt, erit autem $p$ minor quam $\frac{n-2}{2}$.

At, ſi $z = \frac{B}{At^{q-p}}$, fiet $\frac{BB}{A^2 t^{2q-2p}} - \frac{B}{t^q} + \frac{B}{t^q}$, ſeu $\frac{BB}{A^2 t^{q-2p}} - B + B = 0$, quod verum eſt ob terminum primum evaneſcentem facto $t = \infty$. Hoc ergo caſu ſuper, eadem Aſymtota recta duæ habentur Aſymtotæ curvilineæ, ideoque quatuor rami in infinitum ex currentes.

Secundus caſus, quo $q = 2p$, præbet æquationem $zz - \frac{Az}{t^p} + \frac{B}{t^{2p}} = 0$, quæ, vel eſt imaginaria, ſi $AA$ minor quam $4B$, quo caſu nulla Aſymtota extat, vel duas præbet Aſymtotas ſimiles $z = \frac{C}{t^p}$, ſi $AA$ major quam $4B$.

In tertio caſu, ſi $q$ minor quam $2p$, æquationis medius terminus

ſemper evaneſcit, poſito $t = \infty$; eritque ergo $zz + \frac{B}{t^q} = 0$, æquatio pro una Aſymtota. Formas quidem præcedentium Aſymtotarum jam expoſuimus, quare iſtas Aſymtotas hac forma $zz = \frac{C}{t^k}$ contentas examinemus. CAP. VIII.

109. Si igitur Axis in ipſa Aſymtota recta $u = c$ ſumatur, & Applicata $u - c$ ponatur $= z$, omnes illæ Aſymtotæ curvilineæ continebuntur in hac æquatione $zz = \frac{C}{t^k}$, denotante $k$ numerum integrum minorem quam $n - 1$. Harum autem Curvarum rami in infinitum excurrentes, ſeu facto $t = \infty$, ita ſe habebunt. Si $k = 1$, ſeu $zz = \frac{C}{t}$, quia $t$ negativum fieri nequit, Curva duos habebit ramos $EX$ & $FX$ in regionibus P & R in infinitum excurrentes, quod idem eveniet ſi fuerit $k$ numerus quicunque impar. At, ſi ſit $k$ numerus par, ut 2, ſeu $zz = \frac{C}{tt}$, primum diſpiciendum eſt utrum $C$ ſit quantitas negativa an affirmativa. Priori caſu æquatio realis eſſe nequit, ideoque Curva hinc nullum habebit ramum in infinitum extenſum. Poſteriori caſu Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes & cum Aſymtota $XY$ concurrentes, ſcilicet $EX$, $FX$, $GY$, & $HY$ in omnibus quatuor regionibus P, Q, R, & S diſperſos. TAB. X. Fig. 39. TAB. XI. Fig. 40.

110. Ponamus ſupremum membrum æquationis $P$ habere tres Factores æquales, atque æquatione ad Coordinatas $t$ & $u$ reducta, ut ſit $u$ iſte Factor triplex ipſius $P$, erit.

$$P = \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad + \alpha t^{n-3}u^3 + \alpha t^{n-4}u^4 + \&c.$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \beta t^{n-4}u^3 + \beta t^{n-5}u^4 + \&c.$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \gamma t^{n-6}u^4 + \&c.$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 + \delta t^{n-7}u^4 + \&c.$$
&c.



Digitized by Google

 Hinc, pro diverſis conſtitutionibus membrorum $Q$ & $R$, ſequentes oriuntur æquationes.

I.

$$\alpha t^{n-3}u^3+\beta t^{n-1}=0$$

II.

$$\alpha t^{n-3}u^3+\beta t^{n-2}u+\gamma t^{n-2}=0$$

III.

$$\alpha t^{n-3}u^3+\beta t^{n-3}u^2+\gamma t^{n-2}=0$$

IV.

$$\alpha t^{n-3}u^3+\beta t^{n-3}u^2+\gamma t^{n-3}u+\delta t^{n-3}=0.$$

Tab. XI. Fig. 41. 211. Prima æquatio abit in $\alpha u^3+\beta t^2=0$, ideoque hæc Aſymtota eſt Linea tertii ordinis, cujus talis erit figura, ſi Abſciſſæ $t$ ſuper Axe $XY$ a puncto $A$ ſumantur. Duos ſcilicet habebit ramos $E$ & $F$ in regionibus P & Q in infinitum excurrentes.

Secunda æquatio ita ſe habet $\alpha u^3+\beta tu+\gamma t=0$. Ex qua $u$, poſito $t=\infty$, duplicem valorem habere poteſt, vel finitum vel infinitum, ideoque in has duas æquationes reſolvitur $\beta u+\gamma=0$ & $\alpha uu+\beta t=0$, poſterior eſt pro Parabola, uti ante vidimus, ac propterea Curva habebit duos ramos in infinitum extenſos ad Parabolam appropinquantes. Prior vero æquatio præbeat $u-c=0$, quæ eſt pro Linea recta Aſymtota, cujus indoles perſpicietur ſi, præterquam in $\beta u+\gamma=u-c$, ubique loco $u$ ſcribatur $c$; eritque ergo, $t^{n-2}(u-c)+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\epsilon)+\&c.=0$; unde, uti ſupra, ſequitur fore vel $(u=c)+\frac{A}{t}=0$, vel $(u-c)+\frac{A}{tt}=0$, &c.. Ultima vero æquatio, quæ oriri poteſt, eſt $(u-c)+\frac{A}{t^{n-2}}=0$. Hoc ergo caſu Curva duplicem habebit Aſym-

totam, alteram rectam indolis hic declaratæ, alteram vero Parabolam conjunctim. CAP. VIII.

212. Tertia æquatio $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma t = 0$, poſito $t = \infty$, ſubſiſtere nequit, niſi ſit $u = \infty$; ideoque terminus $\beta u^2$ præ $\alpha u^3$ evaneſcit, proditque iſta æquatio tertii ordinis $\alpha u + \gamma t = 0$, pro Aſymtota, cujus hæc eſt figura, ut in regionibus oppoſitis P & S duos habeat ramos $AE$ & $AF$ in infinitum excurrentes. TAB. XI. *Fig.* 42.

Quarta æquatio autem $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$, vel unam vel tres Aſymtotas rectas inter ſe parallelas exhibet, niſi duæ vel omnes inter ſe ſint æquales, ad quarum indolem indagandam ſit primum $u = c$, radix æquationis una aliam ſui ſimilem non habens, ſitque $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = (u - c) \times (fu^2 + gu + h)$. Ponatur ubique $u = c$, præterquam in hoc Factore $u - c$, ac prodibit hujuſmodi æquatio $t^{n-3}(u - c) + At^{n-4} + Bt^{n-5} + Ct^{n-6} + \&c. = 0$; unde Aſymtota orietur formæ $u - c = \frac{K}{t^k}$, exiſtente $k$ numero minore quam $n - 2$.

213. Si æquationis $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$, duæ radices fuerint æquales, ita ut ea expreſſio ſit $= (u - c)^2 \times (fu + g)$; atque, ſtatuendo $u = c$, niſi in quopiam membro fuerit Factor $u - c$, ad hujuſmodi æquationem pervenietur $(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$, ubi erit $q$ minor quam $n - 2$, & $p$ minor quam $q$, quem caſum ante evolvimus. Supereſt ergo caſus, quo æquatio $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$, tres habet radices reales, puta $(u - c)^3$, atque hujuſmodi obtinebitur æquatio $(u - c)^3 t^{n-3} + Pt^{n-4} + Qt^{n-5} + Rt^{n-6} + St^{n-7} + \&c. = 0$. Quod ſi $P$ non fuerit diviſibile per $u - c$, ponatur $u = c$, fietque

Digitized by Google

LIB. II. $(u-c)^3+\frac{A}{t}=0$. Sin autem $P$ diviſorem habeat $u-c$ ſemel, ponatur ubique, præterquam in hoc Factore, $u=c$, atque orietur æquatio hujus formæ $(u-c)^3+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^q}=0$, exiſtente $q$ numero minore quam $n-2$; eſt vero $\frac{B}{t^q}$ terminus ſecundum proxime ſequens, qui non evaneſcit facto $u=c$. Sin $P$ adeo per $(u-c)^2$ fuerit diviſibilis, $Q$ vero non habeat Factorem $u-c$, orietur æquatio hujus formæ $(u-c)^3+\frac{A(u-c)^2}{t}+\frac{B}{tt}=0$. Quod ſi autem ſecundus adeo per $(u-c)^3$ fuerit diviſibilis, tum ordine procedendum eſt, donec ad terminum perveniatur non diviſibilem per $(u-c)^3$, qui ſi fuerit diviſibilis per $(u-c)$, ulterius eſt progrediendum, donec ad terminum non diviſibilem per $u-c$, perveniatur. Sin autem ille terminus per $(u-c)^2$ diviſibilis fuerit, procedatur ulterius donec perveniatur ad terminum vel non diviſibilem per $u-c$ vel diviſibilem. Priori caſu æquatio terminetur, poſteriori ulterius pergatur donec ad terminum non diviſibilem per $(u-c)$ perveniatur. Sic itaque obtinetur ſemper æquatio in hac forma generali contenta $(u-c)^3+\frac{A(u-c)^2}{t^p}+\frac{B(u-c)}{t^q}+\frac{C}{t^r}=0$, ubi erit $r$ minor quam $n-2$; $q$ minor quam $r$, & $p$ minor quam $q$.

214. In hac æquatione vel tres continentur æquationes formæ $(u-c)=\frac{K}{t^k}$; vel una hujuſmodi & una $(u-c)^2=\frac{K}{t^k}$; vel unica tantum formæ $(u-c)^3=\frac{K}{t^k}$: quod poſtremum evenit ſi fuerit & $3p$ major quam $r$ & $3q$ major quam

214. Tum vero etiam fieri poteſt ut duæ æquationes fiant imaginariæ, quæ ergo nullam Aſymtotam indicabunt. Ceterum formas harum Aſymtotarum jam explicavimus præter ultimam æquatione $(u-c)^k = \frac{K}{t^k}$ contentam. Præbet autem iſta æquatio, ſi $k$ ſit numerus impar, formam Figurâ trigeſimâ ſextà deſignatam, cum duobus ramis $EX$ & $FY$ in regionibus oppoſitis P & S in infinitum excurrentibus. Sin autem $k$ ſit numerus par, orietur forma Figura trigeſima ſeptima repræſentata in qua ſunt duo rami $EX$ & $FY$ ad eandem Aſymtotæ rectæ $XY$ partem, ſeu in regionibus P & Q excurrentes.

CAP. VIII.

TAB. X. Fig. 36.

TAB. X. Fig. 37.

215. Quoniam ex his facile perſpicitur, quemadmodum Aſymtotarum forma, ſi quatuor pluresve Factores ſimplices in membro æquationis ſupremo fuerint æquales, inveſtigari debeat, ulterius hic non progredior; verum hoc Caput applicatione regularum datarum ad unum exemplum finiam.

### EXEMPLUM.

*Sit igitur propoſita Linea curva hac æquatione expreſſa* $y^3xx \times (y-x) - xy(yy+xx) + 1 = 0$, *cujus ſupremum membrum* $y^3xx(y-x)$ *unum Factorem habet ſolitarium*, $y-x$, *duos æquales* $xx$, *& inſuper tres æquales* $y^3$.

Conſideremus primum Factorem ſimplicem $y-x$; ex quo, poſito $y=x$, fiet $y-x-\frac{2}{x}=0$; &, ob $x=\infty$, erit $y-x=0$, quæ eſt æquatio pro Aſymtota rectilinea $BAC$ cum Axe $XY$ in initio Abſciſſarum faciens angulum ſemirectum $BAY$. Ad hanc Lineam transferatur tanquam ad Axem æquatio, quod fiet ponendo $y=\frac{u+t}{\sqrt{2}}$ & $x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$; quo facto orietur hæc æquatio $\frac{(u+t)(tt-uu)^2u}{4} + \frac{(tt-uu)(tt+uu)}{2} + 1 = 0$: unde, per 4 multiplicando, fiet

TAB. XI. Fig. 43.

$$
\begin{aligned}
o = t^5u &+ t^4uu - 2t^3u^3 - 2ttu^4 + tu^5 + u^6 \\
&- 2t^4 \qquad\qquad\qquad + 2u^4 \\
&+ 4
\end{aligned}
$$

ex hac æquatione, facto $t = \infty$, invenitur $u = o$; ideoque reliqui termini, præter hos duos $t^5u - 2t^4$, evaneſcunt; unde pro Aſymtota curvilinea erit $u = \frac{2}{t}$. Ob hunc ergo Factorem Curva quæſita duos habebit ramos $bB$, $cC$ in infinitum excurrentes.

216. Sumantur nunc Factores æquales gemini $x^2$; eritque, ob $xx = \frac{xy(yy+xx)-1}{y^3(y-x)}$. Axe ergo ſumto recta $AD$ ad priorem $XY$ normali, fiet $y = t$ & $x = u$, pro quo iſta æquatio reſultat

$$
\begin{aligned}
o = t^4u^2 &- t^3u^3 \\
- t^3u &- t\,u^3 \\
+ 1
\end{aligned}
$$

quæ, facto $t$ infinito, abit in $t^4u^2 - t^3u + 1 = o$, unde duæ naſcuntur æquationes $u = \frac{1}{t}$ & $u = \frac{1}{t^3}$. Quare hic Factor quatuor præbet ramos in infinitum excurrentes; primo nempe duos $dD$, $eE$ ex æquatione $u = \frac{1}{t}$; & duos ad easdem partes ſitos $\delta D$ & $\epsilon E$ ex æquatione $u = \frac{1}{t^3}$.

217. Tres Factores æquales $y^3$ referuntur ad ipſum Axem $XY$, fietque $t = x$ & $y = u$, unde naſcitur æquatio hæc,

$$o = -t^3u^3 + ttu^4 - t^3u - tu^3 + 1:$$

quæ, poſito $t$ infinito, dat $t^3u^3 + t^3u = o$, ſeu $u(uu+1) = o$; unde, ob $uu + 1 = o$ æquationem impoſſibilem, unica obtinetur Aſymtota recta $u = o$, conveniens cum ipſo Axe $XY$, cujus indoles exprimetur hac æquatione $t^3u = 1$ ſeu $u = \frac{1}{t^3}$; ac propterea iſte Factor triplex duos tantum præbet ramos $yY$ & $xX$ in infinitum excurrentes. Omnino ergo

Curva

Curva quæſita octo ramos in infinitum extenſos habebit, qui quomodo in ſpatio finito inter ſe conjungantur hujus non eſt loci explicare. CAP. VIII.

218. Ex hoc ergo & præcedente Capite ramorum in infinitum extenſorum varietas luculenter perſpicitur. Primum enim hi rami Curvarum vel ad Lineam quampiam rectam tanquam Aſymtotam convergunt, uti fit in Hyperbola, vel Aſymtotam rectam non habent, uti Parabola. Priori caſu rami Curvarum vocantur *hyperbolici*, poſteriori *parabolici*. Utriuſque claſſis inumerabiles dantur ſpecies; ramorum enim hyperbolicorum ſpecies his exprimuntur æquationibus, inter Coordinatas $t$ & $u$, quarum illa $t$ ſtatuitur infinita.

$$u = \frac{A}{t};\ u = \frac{A}{tt};\ u = \frac{A}{t^3};\ u = \frac{A}{t^4},\ \&c.$$
$$u^2 = \frac{A}{t};\ u^2 = \frac{A}{tt};\ u^2 = \frac{A}{t^3};\ u^2 = \frac{A}{t^4},\ \&c.$$
$$u^3 = \frac{A}{t};\ u^3 = \frac{A}{tt};\ u^3 = \frac{A}{t^3};\ u^3 = \frac{A}{t^4},\ \&c.$$
&c.

Ramorum vero parabolicorum ſpecies indicantur ſequentibus æquationibus.

$$u^2 = At;\ u^3 = At;\ u^4 = At;\ u^5 = At,\ \&c.$$
$$u^3 = At^2;\ u^4 = At^2;\ u^5 = At^2;\ u^6 = At^2,\ \&c.$$
$$u^4 = At^3;\ u^5 = At^3;\ u^6 = At^3;\ u^7 = At^3,\ \&c.$$
&c.

Quælibet autem æquatio harum expoſitarum, ad minimum, duos exhibet ramos in infinitum excurrentes, ſi exponentium ipſarum $t$ & $u$ non uterque fuerit numerus par; ſin autem uterque exponens fuerit numerus par, tum vel nullum ramum infinitum præbet, vel quatuor: illud ſcilicet evenit, ſi æquatio ſit impoſſibilis, hoc vero ſi ſit realis.



Digitized by Google

## CAPUT IX.

*De Linearum tertii ordinis ſubdiviſione in ſpecies.*

219. NATURA atque numerus ramorum in infinitum extenſorum merito eſſentiale diſcrimen in Lineis curvis conſtituere cenſetur, atque ex hoc fonte commodiſſime deſumitur ratio ſubdiviſionis Linearum cujuſque ordinis in ſuas ſpecies diverſas. Hinc enim quoque oritur eadem Linearum ſecundi ordinis diviſio in ſuas ſpecies, quam ipſa rei natura ſupra ſuppeditaverat.

Sit enim propoſita æquatio generalis pro Lineis ſecundi ordinis

$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0,$$

cujus ſupremum membrum $\alpha yy + \beta yx + \gamma xx$, potiſſimum ſpectetur, utrum habeat Factores ſimplices reales an ſecus. Quod ſi enim careat Factoribus, naſcitur prima ſpecies *Ellipſis* dicta, ſin autem Factores ſint reales, videndum eſt utrum ſint inæquales, an æquales illo caſu oritur *Hyperbola*, hoc vero *Parabola*.

220. Caſu ergo, quo membri ſupremi Factores ſunt reales & inæquales, Curva duas habebit Aſymtotas rectas; ad quarum naturam inveſtigandam ſit $\alpha yy + \beta yx + \gamma xx = (ay - bx)(cy - dx)$, ita ut ſit

$$(ay - bx)(cy - dx) + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0.$$

Conſideretur primum Factor $ay - bx$, qui in infinito dat $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, fiet itaque

$$ay - bx + \frac{\delta b + \epsilon a}{bc - ad} + \frac{\zeta}{cy - dx} = 0,$$

unde æquatio $ay - bx + \frac{\delta b + \epsilon a}{bc - ad} = 0$, definit poſitionem unius Aſymtotæ rectæ; ſimilique modo æquatio hæc $cy - dx + \frac{\delta d + \epsilon c}{ad - bc} = 0$, oſtendet Aſymtotam alteram.

221. Ad naturam cujuſque Aſymtotæ ſcrutandam, æquationem ad alium Axem transferamus ponendo $y = \frac{au + bt}{\sqrt{(aa + bb)}}$ & $x = \frac{at - bu}{\sqrt{(aa + bb)}}$, ſitque $\sqrt{(aa + bb)} = g$, erit $u((ac + db)u + (bc - ad)t) + \frac{(\delta a - \epsilon b)u + (\delta b + \epsilon a)t}{g} + \zeta = 0$, ideoque

$$g(bc - ad)tu + g(ac + bd)uu + (\delta b + \epsilon a)t + (\delta a - \epsilon b)u + \zeta g = 0.$$

Hinc, poſito in reliquis membris $u = -\frac{\delta b - \epsilon a}{g(bc - ad)}$, erit $(g(bc - ad)u + \delta b + \epsilon a)t + \frac{(ac + bd)(\delta b + \epsilon a)^2}{g(bc - ad)^2} - \frac{(\delta a - \epsilon b)(\delta b + \epsilon a)}{g(bc - ad)} + \zeta g = 0$, ſeu $g(bc - ad)u + \delta b + \epsilon a + \frac{g(\delta b + \epsilon c)(\delta b + \epsilon a)}{(bc - ad)^2 t} + \frac{\zeta g}{t} = 0$: erit ergo Aſymtota hyperbolica generis $u = \frac{A}{t}$. Simili vero modo Aſymtota altera ex Factore $cy - dx$ oriunda definietur, unde Curva habebit duo ramorum in infinitum extenſorum paria, utrumque æquatione $u = \frac{A}{t}$ expreſſum.

222. Sint jam ambo Factores æquales, ſeu $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx = (ay - bx)^2$; atque, facta eadem ad alium Axem tranſlatione, qua fit $y = \frac{av + bt}{g}$, & $x = \frac{at - bu}{g}$, erit $gguu + \frac{(\delta a - \epsilon b)u}{g} + \frac{(\delta b + \epsilon a)t}{g} + \zeta = 0$; &, facto $t$ infinito, erit $uu + \frac{(\delta b + \epsilon a)t}{g^3} = 0$, quæ æquatio oſtendit



Digitized by Google

 duos ramos parabolicos ſpeciei $uu = At$, quippe Curva ipſa erit Parabola, ipſaque ſua Aſymtota. Sin autem eſſet $\delta b + \epsilon a = 0$, tum æquatio foret $gguu + \frac{\delta g u}{a} + \zeta = 0$, pro duabus rectis inter ſe parallelis, qui eſt caſus, quo æquatio ſecundi ordinis tota in duos Factores ſimplices eſt reſolubilis. Sic igitur ſpecies Linearum ſecundi ordinis inveniſſemus, etiam ſi nondum erutæ fuiſſent.

223. Eodem igitur modo aggrediamur Lineas tertii ordinis, quarum æquatio generalis eſt

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0.$$

Supremum igitur membrum $\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3$, quia eſt imparium dimenſionum, vel unum habet Factorem ſimplicem realem, vel omnes tres Factores ſimplices erunt reales. Sequentes igitur caſus ſunt evolvendi.

I.

Si unicus extet Factor ſimplex realis.

II.

Si omnes tres ſint reales, & inter ſe inæquales.

III.

Si duo Factores fuerint æquales.

IV.

Si omnes tres Factores fuerint æquales.

Quoniam vero in quovis caſu ad unicum Factorem calculum accommodaſſe ſufficit; ſit iſte Factor, ſive ſolus adſit ſive cum aliis ſui æqualibus inæqualibuſve, $ay - bx$, atque ad hunc poſitio Axis ita immutetur, ut hactenus fecimus; quo facto, oriatur hæc æquatio, qua vice ſuperioris utamur cum æque late pateat

$$\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3 + \delta tt + \epsilon tu + \zeta uu + \eta t + \theta u + \iota = 0,$$

ubi membrum ſupremum $\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3$, unum certe habet Factorem $u$.

## CASUS I.

224. Habeat ergo membrum ſupremum unicum Factorem realem $u$, quod evenit ſi $\zeta\zeta$ ſit minor quam $4\alpha\gamma$: atque, poſito $t$ infinito, erit $\alpha u + \delta = 0$, quæ eſt æquatio pro Aſymtota recta. Præbeat hæc æquatio valorem $u = c$; eritque,

$$\alpha tt(u-c) + t(\zeta cc + \epsilon c + \eta) + \gamma c^3 + \zeta cc + \theta c + \iota = 0,$$

quæ eſt æquatio pro natura Aſymtotæ. Hinc, prout $\zeta cc + \epsilon c + \eta$ vel non fuerit $= 0$, vel ſit $= 0$, duplex Aſymtotæ indoles prodit; nempe vel $u - c = \frac{A}{t}$, vel $u - c = \frac{A}{tt}$; unde duæ primæ Linearum tertii ordinis ſpecies formantur, quæ ita ſe habebunt.

1.

PRIMA Species unicam habet Aſymtotam rectam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$.

2.

SECUNDA Species unicam habet Aſymtotam rectam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

## CASUS II.

225. Sint membri ſupremi tres Factores ſimplices reales & inter ſe inæquales; quod evenit ſi in æquatione

$$\alpha ttu + \zeta tuu + \gamma u^3 + \delta tt + \epsilon tu + \zeta uu + \eta t + \theta u + \iota = 0,$$

fuerit $\zeta\zeta$ major quam $4\alpha\gamma$. Hoc igitur caſu de unoquoque Factore eadem ſunt tenenda, quæ modo de unico Factore ſunt expoſita. Unuſquiſque ſcilicet ſuppeditat binos ramos hyperbolicos vel ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, vel ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, unde

Lib. II. in hoc caſu quatuor diverſæ ſpecies Linearum tertii ordinis continentur, tribus Aſymtotis rectis ad ſe invicem utcunque inclinatis præditæ, quæ ſpecies ſunt.

3.

Tertia Species tres habet Aſymtotas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$.

4.

Quarta Species duas habet Aſymtotas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$ & unam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

*Quinta Species unam habet Aſymtotam ſpeciei* $\mathrm{u} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{t}}$ *& duas ſpeciei* $\mathrm{u} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{tt}}$. *

Sexta Species tres habet Aſymtotas ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

226. Videamus autem an hæ omnes ſpecies ſint poſſibiles; quem in finem ſumamus hanc æquationem latiſſime patentem,

$$y(\alpha y - \beta x)(\gamma y - \delta x) + \varepsilon xy + \zeta yy + \eta x + \theta y + \iota = 0,$$

cujus ſupremum membrum tres habet Factores reales; quanquam enim terminus $xx$ eſt omiſſus, tamen æquatio non minus late patet. Ex præcedentibus autem intelligitur, Factorem $y$ præbere Aſymtotam formæ $u = \frac{A}{t}$, ſi non fuerit $\eta = 0$. Quare videamus cujuſmodi Aſymtotam præbeat Factor $\alpha y - \beta x$. Ad hoc ponamus $y = \alpha u + \beta t$, & $x = \alpha t - \beta u$; ſitque, brevitatis ergo, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, quod ſemper aſſumere licet; atque æquatio transformabitur in hanc formam.

$$\left.\begin{array}{l} \beta(\beta\gamma - \alpha\delta)ttu + (2\alpha\beta\gamma - (\alpha\alpha - \beta\beta)\delta)tuu + \alpha(\alpha\gamma + \beta\delta)u^3 \\ + \beta(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)tt + (2\alpha\beta\zeta + (\alpha\alpha - \beta\beta)\varepsilon)tu + \alpha(\alpha\zeta - \beta\varepsilon)u^2 \\ \qquad + (\alpha\eta + \beta\theta)t \qquad\qquad\qquad + (\alpha\theta - \beta\eta)u \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \iota \end{array}\right\} = 0$$

Hic Factor $\alpha y - \beta x$ tranſit in $u$; ex quo, poſito $t$ infinito,

* Vide infra pag. 119.

primum ſit $u = \frac{\alpha\varepsilon + \beta\zeta}{\alpha\delta - \beta\gamma} = c$, qui valor ſi loco $u$ in ſecundo membro continente $t$ ſubſtituatur, oſtendet ex hoc Factore $u$ ſeu $\alpha y - \beta x$ Aſymtotam oriri formæ $u = \frac{A}{t}$ niſi fuerit. Cap.IX.

$$\frac{\alpha\eta + \beta\theta}{\beta} + \frac{(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0.$$

Simili modo Factor $\gamma y - \delta x$ Aſymtotam præbebit formæ $u = \frac{A}{t}$ niſi fuerit

$$\frac{\gamma\eta + \delta\theta}{\delta} + \frac{(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0.$$

227. Hinc patet fieri utique poſſe ut neque $\eta$ neque utraque formula modo inventa evaneſcat; ex quo ſpecies tertia utique erit poſſibilis. Quod ad ſpeciem quartam attinet, ponatur $\eta = 0$, quo una Aſymtota formæ $u = \frac{A}{tt}$ prodeat; tum autem ambæ reliquæ expreſſiones in unam coaleſcunt, ideoque binæ reliquæ Aſymtotæ erunt formæ $u = \frac{A}{t}$, niſi fuerit $\theta + \frac{(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0$; unde & ſpecies quarta eſt poſſibilis. At, ſi præter $\eta = 0$, una ex binis reliquis expreſſionibus reddatur $= 0$, ſimul altera evaneſcit; quam ob rem fieri non poteſt, ut duæ Aſymtotæ fiant formæ $u = \frac{A}{tt}$, quin ſimul tertia eandem formam induat; ex quo ſpecies quinta eſt impoſſibilis. Sexta autem ob hoc ipſum erit poſſibilis, quia oritur, ſi $\eta = 0$, & $\theta = \frac{-(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}$. Hi ergo duo caſus quinque tantum præbuerunt ſpecies Linearum tertii ordinis, quod ea, quam quintam poſuimus, prætermitti debet, &

5.

Quinta Species tres habet Aſymtotas ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

Lib. II.

## Casus III.

228. Habeat membrum ſupremum duos Factores $u$ æquales; quod evenit, ſi in æquatione caſus præcedentis primus terminus $\alpha ttu$ evaneſcat. Æquatio ergo generalis ad hunc caſum pertinens erit hujuſmodi,

$$\alpha tuu - \beta u^3 + \gamma tt + \delta tu + \varepsilon uu + \zeta t + \eta u + \theta = 0,$$

habet ergo membrum ſupremum duos Factores $u$ æquales, ac tertium $\alpha u - \beta u$ reliquis inæqualem. Iſte tertius Factor producet Aſymtotam vel formæ $u = \frac{A}{t}$, vel formæ $u = \frac{A}{tt}$, prout fuerit hæc expreſſio

$$(\alpha\delta + 2\beta\gamma)(\alpha^2\varepsilon + \alpha\beta\delta + \beta\beta\gamma) - \alpha^3(\alpha\eta + \beta\zeta)$$

vel non $= 0$, vel $= 0$.

229. Quod ad duos Factores æquales attinet, primum caſus occurrit, ſi $\gamma$ non fuerit $= 0$; tum enim, facto $t = \infty$, fiet $\alpha uu + \gamma t = 0$, quæ eſt æquatio pro Aſymtota parabolica ſpeciei $uu = At$. Hinc iſtæ duæ naſcentur ſpecies novæ Linearum tertii ordinis, nempe.

6.

Sexta Species habet unam Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$ & unam Aſymtotam ſpeciei $uu = At$.

7.

Septima Species habet unam Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$ & unam parabolicam ſpeciei $uu = At$.

230. Sit jam $\gamma = 0$; atque Factor tertius $\alpha t - \beta u$ dabit Aſymtotam formæ $u = \frac{A}{tt}$, ſi fuerit

$$\delta(\alpha\varepsilon + \beta\delta) = \alpha(\alpha\eta + \beta\zeta)$$

ſin autem hæc æqualitas non habeat locum, Aſymtota erit formæ $u = \frac{A}{t}$. Habebimus ergo hanc æquationem

$+ \alpha tuu$

$$\left.\begin{array}{ll} +\alpha t u u & -\beta u^3 \\ +\delta t u & +\varepsilon u u \\ +\zeta t & +\eta u \\ +\theta & \end{array}\right\} = 0$$

Hic, facto $t = \infty$, fiet $\alpha u u + \delta u + \zeta = 0$.

Sit primum $\delta\delta$ minor quam $4\alpha\zeta$, atque hinc nulla orietur Aſymtota; quare ex hoc caſu duæ oriuntur ſpecies.

8.

Octava Species habet unicam Aſymtotam ſpeciei

$$u = \frac{A}{t}.$$

9.

Nona Species habet unicam Aſymtotam ſpeciei

$$u = \frac{A}{tt}.$$

231. Sint æquationis $\alpha u u + \delta u + \zeta = 0$, ambæ radices reales & inæquales, nempe $\delta\delta$ major quam $4\alpha\zeta$; atque hinc duæ prodibunt Aſymtotæ rectæ inter ſe parallelæ, utraque formæ $u = \frac{A}{t}$, qui caſus denuo duas ſuppeditat Species.

10.

Decima Species habet unam Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$ & duas inter ſe parallelas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$.

11.

Undecima Species habet unam Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$ & duas inter ſe parallelas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$.

232. Sint æquationis $\alpha u u + \delta u + \zeta = 0$, ambæ radices inter ſe æquales, ſeu $\delta\delta = 4\alpha\zeta$, ſeu $\alpha u u + \delta u + \zeta = \alpha(u-c)^2$, fietque $\alpha t(u-c)^2 = \beta c^3 - \varepsilon c c - \eta c - \theta$, unde oritur Aſymtota recta una ſpeciei $u u = \frac{A}{t}$. Hinc ergo duæ naſcuntur Species novæ.

12.

Duodecima Species habet unam Aſymtotam ſpeciei

 $u = \frac{A}{t}$ & unam ſpeciei $uu = \frac{A}{t}$.

13.

Decimatertia Species habet unam Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$ & unam ſpeciei $uu = \frac{A}{t}$.

## Casus IV.

233. Quod ſi membri ſupremi omnes tres Factores fuerint æquales, æquatio habebit hujuſmodi formam,

$$\alpha u^3 + \beta tt + \gamma tu + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0,$$

Hic primum ſpectandus eſt terminus $\beta tt$, qui ſi non deſit, Curva habebit Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$, ſicque una oritur Species.

14.

Decimaquarta Species habet unicam Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$.

234. Deſit jam terminus $\beta tt$, eritque

$$\alpha u^3 + \gamma tu + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0;$$

unde, poſito $t$ infinito, fiet $\alpha u^3 + \gamma tu + \epsilon t = 0$, niſi ſint $\gamma$ & $\epsilon = 0$. Non igitur ſit $\gamma = 0$, atque in hac æquatione duæ continentur æquationes $\alpha uu + \gamma t = 0$, & $\gamma u + \epsilon = 0$; prior eſt pro Aſymtota parabolica ſpeciei $uu = At$; poſterior vero, ſi ponatur $\frac{-\epsilon}{\gamma} = c$, dabit æquationem hanc

$$\gamma t(u - c) + \alpha c^3 + \delta cc + \zeta c + \eta = 0,$$

eritque ergo pro Aſymtota hyperbolica ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, unde.

15.

Decimaquinta Species unam habet Aſymtotam parabolicam ſpeciei $uu = At$, unam rectam ſpeciei $u =$

Digitized by Google

$\frac{A}{t}$, atque Axis parabolæ parallelus eſt alteri Aſymtotæ rectæ. CAP. IX.

235. Sit etiam $\gamma = 0$, ut ſit hæc æquatio

$$\alpha u^3 + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0,$$

ubi $\epsilon$ evaneſcere non poteſt, niſi ſimul Linea ceſſet eſſe Curva. Facto autem $t$ infinito, neceſſario $u$ debet eſſe infinita, unde fit $\alpha u^3 + \epsilon t = 0$, quæ præbet ſpeciem ultimam.

16.

Decima sexta Species unam habet Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = At$.

236. Omnes ergo Lineas tertii ordinis reduximus ad *ſedecim Species*, in quibus propterea omnes illæ *Species ſeptuaginta duæ*, in quas Newtonus Lineas tertii ordinis diviſit, continentur. Quod vero inter hanc noſtram diviſionem ac *Newtonianam* tantum intercedat diſcrimen mirum non eſt; hic enim tantum ex ramorum in infinitum excurrentium indole Specierum diverſitatem deſumſimus, cum Newtonus quoque ad ſtatum Curvarum in ſpatio finito ſpectaſſet, atque ex hujus varietate diverſas Species conſtituiſſet. Quanquam autem hæc diviſionis ratio arbitraria videtur, tamen Newtonus ſuam tandem rationem ſequens multo plures Species producere potuiſſet, cum equidem mea methodo utens neque plures neque pauciores Species eruere queam.

237. Quo igitur natura & complexus cujuſque Speciei melius perſpiciatur, æquationem generalem pro qualibet Specie exhibebo, idque in ſimpliciſſima forma, quæ ſalva univerſitate locum habere poteſt. Pro unaquaque vero ſimul Species *Newtonianas* eo pertinentes recenſebo.

Species Prima.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + bx + cy + d = 0,$$

exiſtente $mm$ majore quam $nn$ & niſi fuerit $b = 0$.

Huc pertinent Newtoni ſpecies, 33, 34, 35, 36, 37, 38;

SPECIES SECUNDA.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + cy + d = 0:$$

exiſtente $mm$ minore quam $nn$.

Huc pertinent NEWTONI ſpecies, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

SPECIES TERTIA.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy + bx + cy + d = 0,$$

ubi nec $b = 0$, nec $mb + c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, nec $nb + c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, neque $m = n$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; item 24, 25, 26, 27, ſi $a = 0$.

SPECIES QUARTA.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy + cy + d = 0;$$

ubi nec $c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, nec $m = n$.

Huc pertinent NEWTONI Species 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21; item, ſi $a = 0$, hæ 28, 29, 30, 31.

SPECIES QUINTA.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy - \frac{aay}{(m-n)^2} + d = 0,$$

non exiſtente $m = n$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 22, 23, & 32.

SPECIES SEXTA.

$$yy(x - my) + axx + bx + cy + d = 0;$$

ſi neque $a = 0$, neque $2m^3aa - mb - c = 0$.

Huc pertinent NOWTONI Species, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52.

Digitized by Google

SPECIES SEPTIMA.

$$yy(x-my)+axx+bx+m(2m^2a^2-b)y+d=0;$$
non exiſtente $a=0$.
Huc pertinent NEWTONI Species, 53, 54, 55, 56.

SPECIES OCTAVA.

$$yy(x-my)+bbx+cy+d=0;$$
non exiſtente $c=-mbb$ nec $b=0$;
Huc pertinent NEWTONI Species, 61 & 62.

SPECIES NONA.

$$yy(x-my+bbx-mbby+d=0;$$
non exiſtente $b=0$.
Huc pertinet NEWTONI Species, 63.

SPECIES DECIMA.

$$yy(x-my)-bbx+cy+d=0;$$
non exiſtente $c=mbb$, nec $b=0$.
Huc pertinent NEWTONI Species, 57, 58, 59.

SPECIES UNDECIMA.

$$yy(x-my)-bbx+mbby+d=0;$$
non exiſtente $b=0$.
Huc pertinet NEWTONI Species, 60.

SPECIES DUODECIMA.

$$yy(x-my)+cy+d=0;$$
non exiſtente $c=0$.
Huc pertinet NEWTONI Species, 64.

SPECIES TERTIA-DECIMA.

$$yy(x-my)+d=0.$$

Huc pertinet NEWTONI Species, 65.

SPECIES QUARTA-DECIMA.

$$y^3+axx+bxy+cy+d=0;$$

non exiſtente $a=0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 67, 68, 69, 70, 71.

SPECIES QUINTA-DECIMA.

$$y^3+bxy+cx+d=0;$$

non exiſtente $b=0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 66.

SPECIES SEXTA-DECIMA.

$$y^3+ay+bx=0;$$

non exiſtente $b=0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 72.

238. Species autem hæ plerumque tam late patent, ut ſub unaquaque varietas ſatis notabiles contineantur; ſi quidem ad formam, quam Curvæ habent in ſpatio finito, reſpiciamus. Hancque ob cauſam NEWTONUS numerum Specierum multiplicavit, ut eas Curvas, quæ in ſpatio finito notabiliter diſcrepant, a ſe invicem ſecerneret. Expediet ergo has, quas *Species* nominavimus, *Genera* appellare, atque varietates, quæ ſub unoquoque deprehenduntur, ad *Species* referre. Imprimis autem hoc erit tenendum, ſi quis Lineas quarti altiorisve ordinis ſimili modo ſubdividere voluerit; ibi enim multo major varietas in quavis Specie ſic inventa locum habebit.

## C A P U T X.

### *De præcipuis Linearum tertii ordinis proprietatibus.*

239. Quemadmodum ſupra Linearum ſecundi ordinis proprietates præcipuas ex æqnatione generali deduximus, ita etiam Linearum tertii ordinis præcipuæ proprietates ex æquatione generali cognoſci poterunt: ſimilique modo licebit Linearum quarti altiorisve gradus proprietates ex æquatione concludere. Quam ob rem conſideremus æquationem generaliſſimam pro Lineis tertii ordinis, quæ eſt

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

quæ exprimet naturam Lineæ tertii ordinis cujuſvis inter Coordinatas $x$ & $y$ ad quemvis angulum inclinatas, & recta quacunque pro Axe aſſumta.

240. Niſi igitur $\alpha$ ſit $= 0$, unicuique Abſciſſæ $x$ vel una reſpondebit Applicata realis, vel tres. Ponamus dari tres Applicatas reales; atque manifeſtum eſt earum relationem per æquationem difiniri poſſe. Poſita itaque $\alpha = 1$, iſtiusmodi erit æquatio,

$$y^3 + (\beta x + \epsilon)yy + (\gamma xx + \zeta x + \theta)y + \delta x^3 + \eta xx + \iota x + \varkappa = 0:$$

atque ſumma iſtarum trium Applicatarum eidem Abſciſſæ $x$ reſpondentium, erit $= -\beta x - \epsilon$; ſumma trium rectangulorum ex binis applicatis formatorum erit $= \gamma xx + \zeta x + \theta$; ac denique poductum omnium ſeu parallelipedum ex illis formatum erit $= -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \varkappa = 0$. Si duæ Applicatæ eſſent imaginariæ, hæc quidem eadem valerent, at ad Linearum figuram accommodari non poſſent, quia ex ea

LIB. II. neque ſumma neque rectangulum duarum Applicatarum imaginarium intelligi poteſt.

TAB. XII. Fig. 44. 241. Sit igitur Linea quæcunque tertii ordinis ad Axem $AZ$ relata ad quem ſub dato angulo applicatæ ſint Ordinatæ $LMN$, $lmn$ Curvam ſecantes in tribus punctis. Poſita ergo Abſciſſa $AP = x$, Applicata $y$ triplicem habebit valorem $PL$, $PM$, & $-PN$: unde erit $PL + PM - PN = -\mathrm{\beta}x - \varepsilon$. Quare, ſi capiatur $PO = z = \frac{PL + PM - PN}{3}$, punctum $O$ ita erit in medio ſitum, ut ſit $LO = MO + NO$. Cum igitur ſit $z = -\frac{\mathrm{\beta}x - \varepsilon}{3}$, hoc punctum $O$ ſitum erit in Linea recta $OZ$, quæ recta propterea omnes Ordinatas $lmn$ ipſi $LMN$ parallelas ita ſecabit in $o$, ut ſit $lo + mo = no$; quæ proprietas analoga eſt proprietati Diametrorum, qua Lineæ ſecundi ordinis ſunt præditæ. Quod ſi ergo duæ Ordinatæ parallelæ & Curvam in tribus punctis ſecantes ita ſecentur in punctis $O$ & $o$, ut binæ Applicatæ ad unam partem jacentes ſimul ſumtæ æquales ſint tertiæ ad partem alteram ſitæ, recta per hæc puncta $O$ & $o$ ducta omnes reliquas Ordinatas illis parallelas ſimiliter ſecabit, eritque quaſi Diameter Lineæ tertii ordinis.

242. Quoniam in Lineis ſecundi ordinis omnes Diametri ſe mutuo in eodem puncto interſecant, videamus quomodo plures hujuſmodi Diametri Linearum tertii ordinis inter ſe ſint comparatæ. Concipiamus ergo ad eundem Axem $AP$ ſub alio quovis angulo Applicatas; ſitque Abſciſſa $= t$ & Applicata $= u$; erit $y = nu$ & $x = t - mu$, qui valores in æquatione generali

$$y^3 + \mathrm{\beta}y^2x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

ſubſtituti hanc dabunt æquationem

$+ n^3u^3$

$$\left.\begin{array}{l}+n^3u^3+\beta n^2u^2t+\gamma nutt+\delta t^3+\varepsilon n^2u^2+\zeta nut+\eta tt+\theta nu+\iota t+\varkappa\\ -\beta mn^2u^3-2\gamma mnu^2t-3\delta mutt\;-\zeta mnuu-2\eta mut-\iota mu\\ +\gamma m^2nu^3+3\delta m^2u^2t\qquad\qquad +\eta m^2uu\\ -\delta m^3u^3\end{array}\right\}=0$$

Cap. X.

Hinc pro Linea illa recta Diametri vicem ſuſtinente, ſi ejus Applicata ſub eodem angulo ad Abſciſſam $t$ ducta vocetur $= v$, erit $3v = \dfrac{-\beta n^2t+2\gamma mnt-3\delta m\,t-\varepsilon nn+\zeta mn-\eta mm}{n^3-\beta mn^2+\gamma m^2n-\delta m^3}$.

243. Sit jam $O$ interſectio harum duarum Diametrorum, unde ad Axem $AZ$ primo prioribus Applicatis parallela ducatur $OP$, tum vero poſterioribus parallela $OQ$, eritque $AP = x$, $PO = z$, $AQ = t$ & $OQ = v$. Tum vero erit $z = nv$ & $x = t - mv$, ideoque $v = \frac{z}{n}$, & $t = x + \frac{m}{n}z$. Primo itaque habetur $3z = -\beta x - \varepsilon$, porroque $3v = \frac{-\beta x}{n} - \frac{\varepsilon}{n}$ & $t = x - \frac{\beta mx}{3n} - \frac{\varepsilon m}{3n}$. Subſtituantur hi valores in æquatione ante inventa, & prodibit

Tab. XII. Fig. 45.

$$\left.\begin{array}{l}-\beta nnx+\beta\beta mnx-\beta\gamma mmx+\frac{\beta\delta m^2x}{n}\\ -\varepsilon nn\;+\beta\varepsilon mn\;-\gamma\varepsilon mm\;+\frac{\delta\varepsilon m^2}{n}\\ +\beta nnx-\frac{\beta\beta mnx}{3}-\frac{\beta\varepsilon mn}{3}+\varepsilon nn\\ -2\gamma mnx+\frac{2\beta\gamma mmx}{3}+\frac{2\gamma\varepsilon mm}{3}-\zeta mm\\ +3\delta mmx-\frac{\beta\delta m^2x}{n}-\frac{\delta\varepsilon m^2}{n}+\eta mm\end{array}\right\}=0$$

ſeu

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{3}\beta\beta mnx-\frac{1}{3}\beta\gamma mmx-2\gamma mnx+3\delta mmx\\ +\frac{2}{3}\beta\varepsilon mn-\frac{1}{3}\gamma\varepsilon mm\;-\zeta mn\;+\eta mm\end{array}\right\}=0$$

244. Pendet ergo utique interſectio Diametrorum *O* ab inclinatione Applicatarum ad Axem, quæ litteris *m* & *n* continetur; neque idcirco, (ſi interſectionem Diametrorum *Centrum* vocare lubeat,) Lineæ tertii ordinis omnes Centro gaudent. Interim tamen caſus exhiberi poſſunt, quibus Diametrorum interſectio mutua in idem punctum fixum incidat. Fiet ſcilicet hoc, ſi termini per *mn* & *mm* affecti ſeorſim nihilo æquales ponantur, ac valores ipſius $x$ inde orituri æquales ſtatuantur. Fiet autem ex his duabus æqualitatibus $x = \frac{3\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma} = \frac{3\eta - \gamma\varepsilon}{\beta\gamma - 9\delta}$; qui duo valores ut congruant, neceſſe eſt ut ſit

$$6\beta\beta\eta - 2\beta\beta\gamma\varepsilon - 18\gamma\eta + 6\gamma\gamma\varepsilon = 3\beta\gamma\zeta - 2\beta\beta\gamma\varepsilon - 27\delta\zeta + 18\beta\delta\varepsilon,$$

ſeu

$$\beta\gamma\zeta - 2\beta\beta\eta - 9\delta\zeta + 6\gamma\eta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon = 0,$$

unde fit $\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9\delta\zeta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}$. Quoties ergo $\eta$ hujuſmodi habuerit valorem, toties omnes Diametri ſe mutuo in uno eodemque puncto interſecant; ideoque hæ Lineæ tertii ordinis Centro gaudebunt, quod reperietur ſumendo in Axe.

$$AP = \frac{3\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}, \text{ \&}$$
$$PO = \frac{-3\beta\zeta + 6\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}.$$

245. Hæc eadem Centri determinatio, ſi quod datur, locum habet ſi pro primo coëfficiente $\alpha$ non ponatur unitas. Si enim propoſita fuerit æquatio generaliſſima pro Lineis tertii ordinis

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta xy + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

hæ Curvæ Centro erunt præditæ, ſi fuerit

$\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9\alpha\delta\zeta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}$. Tum vero Centrum

erit in $O$, exiſtente $AP = \frac{3\alpha\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}$ & $PO = \frac{6\gamma\varepsilon - 3\beta\zeta}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}$. Quare, ſi unica Ordinata Curva in tribus punctis ſecans ita dividatur, ut binæ Applicatæ ad unam partem ſitæ æquentur tertiæ ad alteram partem jacenti, tum recta per Centrum & hoc diviſionis punctum ducta, omnes alias Ordinatas illi parallelas ſimiliter ſecabit. CAP. V.

246. Si hæc ad æquationes Specierum ſupra enumeratarum accommodentur, patebit Species primam, ſecundam, tertiam, quartam & quintam Centro gaudere, ſi modo ſit $a = 0$; hocque caſu Centrum in ipſo Abſciſſarum initio eſſe poſitum. Species ſexta & ſeptima Centro prorſus carent, quia coëfficiens $n$ abeſſe nequit. Species vero octava, nona, decima, undecima, duodecima & decima-tertia Centrum habent, ſemper in Abſciſſarum initio poſitum. In Speciebus decima-quarta, decima-quinta & decima-ſexta Centrum infinite diſtat, ideoque omnes illæ Lineæ Triametri inter ſe erunt parallelæ.

247. His de ſumma trium cujuſque Applicatæ valorum notatis, contemplemur eorundem productum, quoniam de rectangulorum agregato nihil admodum notatu dignum reperitur. Erit ergo ex æquatione generali §. 239. $- PM.PL.PN = -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \varkappa$: ad quam expreſſionem explicandam ad hoc attendamus, quod ſi ponatur $y = 0$, fiat $\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \varkappa = 0$, cujus propterea æquationis radices dabunt Axis $AZ$ & Curvæ interſectiones. Quæ ſi ſint in punctis $B$, $C$, & $D$ erit $\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \varkappa = \delta(x - AB)(x - AC)(x - AD)$; quapropter erit $PL.PM.PN = \delta.PB.PC.PD$; ideoque, ſumta alia quacunque Ordinata $lmn$ priori parallela, erit $PL.PM.PN : PB.PC.PD = pl.pm.pn : pB\,pC.pD$; quæ proprietas omnino ſimilis eſt illi, quam ſupra pro Lineis ſecundi ordinis ratione rectangulorum invenimus; atque ſimilis proprietas in Lineas quarti, quinti, & ſuperiorum ordinum competet.

248. Habeat nunc Linea tertii ordinis tres quoque Aſymtotas rectas $FBf$, $GDg$, $HCh$. Quoniam ipſa Linea tertii TAB. XII. Fig. 46.

ordinis in has tres Aſymtotas abit, ſi æquatio pro Curva reſolubilis fiat in tres Factores ſimplices formæ $py + qx + r$; pro Aſymtotis, tanquam Linea complexa, peculiaris æquatio exhiberi poterit, cujus ſupremum membrum conveniet cum ſupremo membro pro Curva. Deinde vero, quia Aſymtotarum poſitio ex ſecundo æquationis membro determinatur, æquatio pro Aſymtotis & æquatio pro Curva ſecundum quoque membrum commune habebunt. Quare, ſi pro Curva ad Axem $AP$ relata hæc fuerit æquatio inter Abſciſſam $AP = x$, & Applicatam $PM = y$,

$$y^3 + (\beta x + \epsilon) y^2 + (\gamma xx + \zeta x + \theta) y + \delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = 0.$$

Pro Aſymtotis ad eundem Axem $AP$ relatis ſequens habebitur æquatio inter Abſciſſam $AP = x$ & Applicatam $PG = z$

$$z^3 + (\beta x + \epsilon) z^2 + (\gamma xx + \zeta x + B) z + \delta x^3 + \eta x^2 + Cx + D = 0,$$

in qua coëfficiens $\zeta$, $B$, $C$, $D$ ita ſunt comparati, ut æquatio in tres Factores ſimplices reſolubilis evadat.

249. Quod ſi ergo ducatur Applicata quæcunque $PN$, cum Curvam ſecans in tribus punctis $L$, $M$, $N$, tum etiam Aſymtotas in tribus punctis $F$, $G$, $H$ ſecans, erit ex æquatione pro Curva $PL + PM + PN = -\beta x - \epsilon$. At ex æquatione pro Aſymtotis erit pari modo $PF + PG + PH = -\beta x - \epsilon$. Hanc ob rem erit $PL + PM + PN = PF + PG + PH$, ſeu $FL - GM + HN = 0$. Atque, ſi alia quæcunque Applicata $pf$ ducatur, erit eodem modo $fn - gm + hl = 0$. Si igitur recta quæcunque cum Curvam tum tres Aſymtotas ſecet in tribus punctis, binæ partes Lineæ inter Aſymtotas & Curvam contentæ quæ ad eandem regionem vergunt, æquales erunt parti in regionem oppoſitam vergenti.

250. In Linea igitur tertii ordinis, quæ tres habet Aſymtotas rectas; tria crura ad has Aſymtotas convergentia non omnia ad eaſdem Aſymtotarum partes poſſunt eſſe diſpoſita:

Digitized by Google

ſed, ſi duo ad eandem partem vergant, tertium neceſſario ad oppoſitas tendet. Hanc ob rem hujuſmodi Linea tertii ordinis qualem figura repræſentat, eſt impoſſibilis, quoniam recta ſecans Aſymtotas in punctis $f$, $g$, $h$, Curvam vero in $l$, $m$, $n$, præbet partes $fn$, $gm$, $hl$ in eandem plagam vergentes, quarum ſumma nihilo æqualis eſſe nequit. Partes enim in eandem plagam vergentes obtinent idem ſignum, puta $+$; quæ vero in contrariam plagam tendunt ſignum $-$: unde patet ſummam trium harum partium evaneſcere non poſſe niſi ſignis diverſis ſint præditæ. CAP. X. TAB. VIII. *Fig.* 47.

251. Hinc jam clare perſpicitur ratio cur in Linea tertii ordinis dari nequeant duæ Aſymtotæ rectæ ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, dum tertia Aſymtota ſit ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, propterea quod illa crura hyperbolica infinities magis ad ſuam Aſymtotam convergant, quam crus hyperbolicum ſpeciei $u = \frac{A}{t}$. Ponamus enim rectam $fl$ in infinitum removeri, fientque intervalla $fn$, $gm$, $hl$ infinite parva. At, ſi rami duo $nx$, $my$ ponantur ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, tertius vero ramus $lz$ ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, tum intervalla $fn$ & $gm$ infinities erunt minora quam intervallum $hl$, ideoque eſſe nequit $gm = fn + hl$. TAB. XII. *Fig.* 46.

252. In Lineis ergo ſuperiorum ordinum, quæ tot habent Aſymtotas quot dimenſiones, unica Aſymtota ſpeciei $u = \frac{A}{t}$ adeſſe nequit, dum reliquæ ſint ſpecierum ſuperiorum $u = \frac{A}{tt}$, $u = \frac{A}{t^3}$ &c.; ſed, ſi una adſit ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, neceſſario & altera adeſſe debet. Ob eandem rationem, ſi Aſymtota ſpeciei $u = \frac{A}{t}$ nulla adſit, fieri non poteſt ut una tantum ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$ adſit, ſed ad minimum duæ ad-

Digitized by Google

LIB. II. eſſe debebunt. Crura enim hyperbolica ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, $u = \frac{A}{t^3}$ &c., infinities magis ad ſuas Aſymtotas convergunt, quam ſpecies $u = \frac{A}{tt}$. Hinc igitur in enumeratione Specierum, quæ in ordine quopiam ſuperiori continentur, caſus impoſſibiles facile excludi, hocque inſignes calculi moleſtiæ evitari poterunt.

253. Ponamus autem Lineam tertii ordinis a recta quapiam in duobus tantum punctis ſecari; atque ab omnibus aliis rectis huic parallelis vel in duobus etiam punctis vel nuſquam ſecabitur. Si igitur in Axe quocunque ſtatuantur Applicatæ $y$ huic rectæ parallelæ, æquatio ita erit comparata

$$yy + \frac{(\gamma xx + \zeta x + \theta)y}{\beta x + \epsilon} + \frac{\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa}{\beta x + \epsilon} = 0.$$

Scilicet, ſi Abſciſſa $AP$ dicatur $= x$, duæ habebuntur Applicatæ $y$, nempe $PM$ & $-PN$; erit autem, ex natura æquationum, $PM - PN = \frac{-\gamma xx - \zeta x - \theta}{\beta x + \epsilon}$. Biſecetur Ordinata $MN$ in puncto $O$, erit $PO = \frac{\gamma xx + \zeta x + \theta}{\beta x + \epsilon}$; hinc ſi ponatur $PO = z$, erit $z(\beta x + \epsilon) = \gamma xx + \zeta x + \theta$: unde patet omnia puncta $O$ Ordinatas parallelas $MN$ biſecantia ſita eſſe in Hyperbola, niſi fuerit $\gamma xx + \zeta x + \theta$ diviſibile per $\beta x + \epsilon$, quo caſu punctum $O$ poſitum erit in Linea recta.

254. Quod ſi ergo $\gamma xx + \zeta x + \theta$ diviſibile fuerit per $\beta x + \epsilon$, tum Curva prædita erit Diametro, ſeu recta omnes Ordinatas parallelas $MN$ biſecante; quæ proprietas in omnes Lineas ſecundi ordinis competit. Verum, ſi $\gamma xx + \zeta x + \theta$ diviſibile ſit per $\beta x + \epsilon$, evaneſcere debebit ſi ponatur $x = \frac{-\epsilon}{\beta}$; quare, ſi fuerit $\gamma\epsilon\epsilon - \beta\epsilon\zeta + \beta\beta\theta = 0$, tum Linea tertii ordinis Diametro erit prædita.

255. Hinc igitur generaliſſime omnes caſus determinare poterius, quibus Lineæ tertii ordinis Diametris ſunt præditæ. Sit enim propoſita æquatio generalis **Cap. X.**

$$\alpha y^3 + \beta y^3 + \gamma yxx + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

cujus Applicatæ $y$, quia triplicem valorem vel unicum habent, Diametri proprietatem recipere nequeunt. Ducantur ergo ſub alio quocunque angulo ad eundem Axem aliæ Applicatæ $u$, ita ut ſit $y = nu$, & $x = t - mu$, ac fiat ſubſtitutio

$$\left.\begin{array}{l} +\alpha n^3u^3 + \beta n^2u^2t + \gamma nutt + \delta t^3 + \epsilon n^2u^2 + \zeta nut + \eta tt + \theta nu + \iota t + \kappa \\ -\beta mn^2u^3 - 2\gamma mnu^2t - 3\delta mutt - \zeta mnu^2 - 2\eta mut - \iota mu \\ +\gamma m^2nu^3 + 3\delta m^2u^2t \qquad\qquad + \eta m^2u^2 \\ -\delta m^3u^3 \end{array}\right\} = 0$$

Primum ergo, quo hæ novæ Applicatæ ad Diametrum recipiendam aptæ reddantur, neceſſe eſt ut duplicem tantum valorem induere poſſint, eritque idcirco

$$\alpha n^3 - \beta mn^2 + \gamma m^2n - \delta m^3 = 0.$$

256. Præterea vero requiritur ut quantitas, per quam $u$ eſt multiplicata, nempe $(\gamma n - 3\delta m)tt + (\zeta n - 2\eta m)t + \theta n - \iota m$, diviſibilis ſit per eam, quæ $uu$ multiplicat, quæ eſt $(\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)t + \epsilon nn - \zeta mn + \eta mm$; ſive illa nihilo fieri debet æqualis, ſi ponatur $t = \frac{-\epsilon nn + \zeta mn - \eta mm}{\beta nn - 2\gamma mm + 3\delta mm}$. Hinc ergo fiet

$$\iota = \frac{\theta n}{m} - \frac{(\zeta n - 2\eta m)(\epsilon nn - \zeta mn + \eta mm)}{(\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)m} + \frac{(\gamma n - 3\delta m)(\epsilon nn - \zeta mn + \eta mm)^2}{(\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)^2 m}.$$

257. Si hæc ad Species ſupra enumeratas applicemus, apparebit in Specie prima nullam prorſus Diametrum locum habere

Lib. II. poſſe. In Specie autem ſecunda Ordinatæ Axi, in quo Abſciſſæ $x$ capiuntur parallelæ Diametro, biſecabuntur. Species tertia nullam prorſus Diametrum admittit. Species quarta ſemper unam habet Diametrum Ordinatas uni Aſymtotæ parallelas biſecantem. Quinta vero Species tres habebit Diametros, quæ ordinatas ſingulis Aſymtotis parallelas biſecabunt. Species ſexta nullam prorſus habere poteſt Diametrum. Septima unam Diametrum ſemper habet pro Ordinatis Aſymtotæ ex Factore $x - my$ ortæ parallelis. Octava unam Diametrum habet pro Ordinatis Axi parallelis. Nona Species duas habet Diametros; alteram pro Ordinatis Axi parallelis, alteram pro Ordinatis alteri Aſymtotæ parallelis. Decima uti octava, & undecima uti nona eſt comparata. Duodecima ratione Diametrorum par eſt octavæ, & decima-tertia nonæ. Decima-quarta unam habet Diametrum pro ordinatis Axi parallelis. Species decima-quinta & ſexta omnino Ordinatas, quæ in duobus punctis Curvam ſecent, non admittunt; ideoque Diametro gaudere nequeunt. Hæc autem Diametrorum proprietates a NEWTONO probe ſunt notatæ, quam ob cauſam earum commemorationem hic data opera attuliſſe juvabit.

258. Quanquam in æquationibus, quas ſupra pro ſingulis Speciebus Linearum tertii ordinis dedimus, Coordinatas $x$ & $y$ inter ſe normales poſuimus, tamen Speciei natura non mutatur, etiamſi eæ quomodocunque ad ſe invicem ſint inclinatæ. Quot enim æquatio, poſitis Coordinatis orthogonalibus, præbet crura in infinitum extenſa, totidem quoque præbebit eadem æquatio, ſi Applicatæ ad Axem utcunque inclinentur. Neque vero etiam natura crurum in infinitum excurrentium mutatur, mutata Coordinatarum inclinatione; quæ enim crura ſunt parabolica, eadem manebunt parabolica, & quæ ſunt hyperbolica eandem naturam retinebunt. Quin etiam Species crurum tam parabolicorum quam hyperbolicorum non alterabitur. Quare omnis Curva, quam æquatio pro prima Specie exhibita præbet, ſive Coordinatæ ſtatuantur rectangulæ ſive obliquangulæ, ſemper ad eandem Speciem primam erit referenda,

Digitized by Google

referenda, ſimilique modo reliquarum Specierum omnium ratio eſt comparata. 

259. Admiſſa ergo Coordinatarum obliquitate quacunque, æquationes ſupra datæ non reſtringentur, ſi loco $y$ ponatur $\nu u$, & $t - \mu u$ loco $x$, exiſtente $\mu\mu + \nu\nu = 1$. Sumto autem angulo obliquitatis pro lubitu, æquationes ſupra datæ ſimpliciores reddi poterunt. Hinc pro ſingulis Speciebus ſequentes ſimpliciſſimæ æquationes inter Coordinatas obliquangulas $t$ & $u$ formabuntur.

### Species Prima.

$$u(tt + nnuu) + auu + bt + cu + d = 0,$$
exiſtente nec $n = 0$ nec $b = 0$.

### Species Secunda.

$$u(tt + nnuu + auu + cu + d = 0,$$
non exiſtente $n = 0$.

### Species Tertia.

$$u(tt - nnuu) + auu + bt + cu + d = 0,$$
exiſtente nec $n = 0$, nec $b = 0$, nec $\pm nb + c + \frac{aa}{4nn} = 0$.

### Species Quarta.

$$u(tt - nnuu) + auu + cu + d = 0,$$
exiſtente nec $n = 0$, nec $c + \frac{aa}{4nn} = 0$.

### Species Quinta.

$$u(tt - nnuu) + auu - \frac{aau}{4nn} + d = 0,$$
non exiſtente $n = 0$.



Digitized by Google

### Species Sexta.

$tuu + att + bt + cu + d = 0$,
exiſtente nec $a = 0$, nec $c = 0$.

### Species Septima.

$tuu + att + bt + d = 0$,
non exiſtente $a = 0$.

### Species Octava.

$tuu + bbt + cu + d = 0$,
exiſtente nec $b = 0$, nec $c = 0$.

### Species Nona.

$tuu + bbt + d = 0$,
non exiſtente $b = 0$.

### Species Decima.

$tuu - bbt + cu + d = 0$,
exiſtente nec $b = 0$, nec $c = 0$.

### Species Undecima.

$tuu - bbt + d = 0$,
non exiſtente $b = 0$.

### Species Duodecima.

$tuu + cu + d = 0$,
non exiſtente $c = 0$.

### Species Decima-tertia.

$tuu + d = 0$.

Digitized by Google

Species Decima-quarta.

$$u^3 + att + cu + d = 0.$$

Species Decima-Quinta.

$$u^3 + atu + bt + d = 0,$$

non exiſtente $a = 0$.

Species Decima-sexta.

$$u^3 + at = 0.$$

---

## CAPUT XI.

### *De Lineis quarti Ordinis.*

260. Æquatio generalis pro Lineis quarti Ordinis eſt

$$\alpha y^4 + \beta y^3 x + \gamma y^2 x^2 + \delta y x^3 + \epsilon x^4 + \zeta y^3 + \eta y^2 x + \theta y xx + \iota x^3 + \kappa yy + \lambda yx + \mu xx + \nu y + \xi x + o = 0;$$

quæ autem, (variatis tum Coordinatarum inclinatione, tum Axis poſitione, tum Abſciſſarum initio,) multis modis pro diverſis caſibus ad ſimpliciorem formam reduci poteſt. Quo igitur, ſecundum methodum traditam, omnes *Species* vel potius *Genera* Linearum, quæ in hoc ordine continentur enumerentur, ad membrum ſupremum reſpici oportet, unde ſequentes caſus naſcuntur diverſi.

I.

Si ſupremi membri omnes quatuor Factores ſimplices ſunt imaginarii.

II.

Si duo Factores tantum ſunt reales & inæquales inter ſe,

III.

Si duo Factores tantum ſunt reales & æquales.

IV.

Si omnes quatuor Factores ſunt reales & inæquales.

V.

Si duo Factores inter ſe ſunt æquales, reliquis binis inter ſe exiſtentibus inæqualibus.

VI.

Si præter duos Factores æquales etiam reliqui duo ſint inter ſe æquales.

VII.

Si tres Factores ſimplices fuerint inter ſe æquales.

VIII.

Si omnes quatuor Factores inter ſe æquales fuerint.

## CASUS. I.

261. Si omnes Factores membri ſupremi fuerint imaginarii, Curva ramis in infinitum excurrentibus omnino erit deſtituta; quoniam igitur ex diverſitate ramorum infinitorum diſcrimen Generum petimus, iſte caſus unicum præbebit Genus. Erit ergo.

### GENUS I.

Curvarum ramis in infinitum extenſis omnino carentium, quarum natura hac æquatione ſimpliciſſima exprimetur

$$(yy+mmxx)(yy-2pxy+qqxx)+ay^3x+byx^3+ cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0.$$

Exiſtente $pp$ minore quam $qq$. Quoniam enim in ſupremo membro termini $y^4$ & $x^4$ neceſſario adſunt, Coordinatis $x$ & $y$ quantitate data ſive augendis ſive minuendis, effici poteſt, ut termini $y^3$ & $x^3$ ex ſecundo membro excedant.

## CASUS II.

262. Si duo Factores membri ſupremi tantum ſint reales & inæquales, per obliquitatem Coordinatarum & Axis mutationem, effici poteſt ut alter ſit $y$ alter vero $x$, æquatio ergo ita ſe habebit

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byx^2 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0$$

exiſtente $mm$ minore quam $nn$.

Quia enim in ſupremo membro termini $y^3x$ & $yx^3$ neceſſario adſunt, in ſecundo membro termini $y^3$ & $x^3$ omitti poſſunt. Habebit ergo Curva duas Aſymtotas rectas, alteram æquatione $y = 0$, alteram æquatione $x = 0$, expreſſam. Prioris ergo indoles exponetur hac æquatione $nnyx^3 + exx + gx + h = 0$; poſterioris hac $xy^3 + cyy + fy + h = 0$. Hinc formabitur.

### GENUS II.

Duabus Aſymtotis rectis, utraque indolis $u = \frac{A}{t}$, præditum, ſi neque $c$ neque $e$ ſit quantitas evaneſcens.

### GENUS III.

Duas habet Aſymtotas rectas, alteram indolis $u = \frac{A}{t}$, alteram indolis $u = \frac{A}{tt}$, & exprimitur æquatione

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + fy + gx + h = 0,$$

exiſtente neque $c = 0$, neque $g = 0$.

### GENUS IV.

Duas habet Aſymtotas rectas, alteram indolis $u = \frac{A}{t}$, alteram $u = \frac{A}{t^3}$, & continetur hac æquatione

 $$yx(yy-2myx+nnxx)+ay^2x+byxx+cyy+dyx+fy+h=0,$$
non exiſtente $c=0$.

## Genus V.

Duas habet Aſymtotas rectas, ambas generis $u=\frac{A}{tt}$, & continetur æquatione
$$yx(yy-2myx+nnxx)+ayyx+byxx+dyx+fy+gx+h=0,$$
exiſtente neque $f=0$, neque $g=0$.

## Genus VI.

Duas habet Aſymtotas rectas, alteram indolis $u=\frac{A}{tt}$, & alteram indolis $u=\frac{A}{t}$, continetur autem hac æquatione
$$yx(yy-2myx+nnxx)+ayyx+byxx+dyx+fy+h=0,$$
non exiſtente $f=0$.

## Genus VII.

Duas habet Aſymtotas rectas, ambas indolis $u=\frac{A}{t}$, & continetur hac æquatione.
$$yx(yy-2myx+nnxx)+ayyx+byxx+dyx+h=0,$$
exiſtente ubique $nn$ majore quam $mm$.

## CASUS III.

263. Sint ambo illi Factores ſupremi membri, qui ſoli ſunt reales, inter ſe æquales, atque æquatio erit hujuſmodi,
$$yy(yy-2myx+nnxx)+ayxx+bx^3+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0,$$
exiſtente iterum $nn$ majore quam $mm$, quæ æquatio, niſi ſit $b=0$, dat

GENUS VIII.

Habens unam Aſymtotam parabolicam ſpeciei $uu = At$.

Si autem $b$ ſit $= 0$, poſito $x = \infty$, fiet $yy + \frac{ay}{nn} + \frac{e}{nn} + \frac{g}{nnx} + \frac{h}{nnxx} = 0$. Hinc, ſi fuerit $aa$ minor quam $4nne$, prodit

GENUS IX.

Nullum habens ramum in infinitum extenſum.

Si fuerit $b = 0$, & $aa$ major quam $4nne$, neque ſit $g = 0$, prodit

GENUS X.

Duas habens Aſymtotas inter ſe parallelas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$.

Si fuerit & $b = 0$, & $g = 0$, & $aa$ major quam $4nne$ prodit

GENUS XI.

Duas habens Aſymtotas inter ſe parallelas ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

Si fuerit $b = 0$, & $aa = 4nne$, nec vero $g = 0$, prodit

GENUS XII.

Aſymtotam habens hyperbolicam ſpeciei $uu = \frac{A}{t}$.

Si fuerit $b = 0$, $g = 0$, & $aa = 4nne$, atque $h$ quantitas negativa, prodit

GENUS XIII.

Aſymtotam habens hyperbolicam ſpeciei $uu = \frac{A}{tt}$.

At, ſi $b = 0$, $g = 0$, $aa = 4nne$, & $h$ quantitas affirmativa, prodit

Digitized by Google

## GENUS XIV.

Nullos prorſus habens ramos in infinitum extenſos.

## CASUS IV.

264. Sint membri ſupremi omnes quatuor Factores ſimplices reales & inæquales, atque æquatio hujuſmodi formam habebit

$$yx(y-mx)(y-nx)+ay^2x+byxx+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0.$$

Curva igitur quatuor habebit Aſymtotas rectas ſpeciei vel $u=\frac{A}{t}$, vel $u=\frac{A}{tt}$, vel $u=\frac{A}{t^3}$. Hinc, ad præceptum §. 251. datum, ſequentia orientur Genera.

## GENUS XV.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas omnes ſpeciei $u=\frac{A}{t}$.

## GENUS XVI.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, tres ſpeciei $u=\frac{A}{t}$, & unam ſpeciei $u=\frac{A}{tt}$.

## GENUS XVII.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, tres ſpeciei $u=\frac{A}{t}$, & unam ſpeciei $u=\frac{A}{t^3}$.

## GENUS XVIII.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, duas ſpeciei $u=\frac{A}{t}$, & duas ſpeciei $u=\frac{A}{tt}$.

GENUS

Digitized by Google

### GENUS XIX.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, duas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, unam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, & unam ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

### GENUS XX.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, duas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, & duas ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

### GENUS XXI.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, omnes ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

### GENUS XXII.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, tres ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, & unam ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

### GENUS XXIII.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, duas ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, & duas ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

### GENUS XXIV.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, omnes ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

### CASUS V.

265. Sint duo Factores membri ſupremi inter ſe æquales, reliquis exiſtentibus inæqualibus, æquatio erit hujuſmodi

LIB. II. $yyx(y+nx)+ayxx+bx^3+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0.$

Hinc primo, ratione Factorum æqualium, omnia oriuntur Genera, quæ in *caſu III*, & unumquodque cum tot varietatibus occurrit, quot Factores inæquales ſuggerunt, hoc eſt quot caſus ſecundus continet Genera. Omnino ergo ſexies ſeptem hoc eſt quadraginta-duo Genera ex hoc caſu naſcuntur. Duo autem hinc prodeunt Genera impoſſibilia, nempe ſi ambæ Aſymtotæ parallelæ fuerint ſpeciei $u=\frac{A}{tt}$, & reliquarum una $u=\frac{A}{t}$, altera exiſtente vel $u=\frac{A}{tt}$, vel $u=\frac{A}{t^3}$. Quare, hic caſus quadraginta Genera præbet, quæ cum antecedentibus numerum Generum *ſexaginta-quatuor* conficiunt, quæ ſingula hic deſcribere nimis foret longum. Neque etiam, quia ſingula hæc Genera evolvere non vacavit, firmiter affirmare licet, omnia eſſe realia. Qui autem ſecundum præcepta data hoc negotium in ſe ſuſcipere voluerit, numerum Generum, ſi opus fuerit, reſtringet atque emendabit.

## CASUS VI.

266. Hic caſus, quo duo Factorum æqualium paria adſunt, iſta æquatione continebitur

$$yyxx+ay^3+bx^3+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0.$$

Utrumque autem Factorum æqualium par in ſe ſpectatum varietates dat ſeptem, unde ambo paria præbebunt Genera quadraginta-novem. Quia vero $h$ ſimul affirmativum & negativum eſſe nequit, duo Genera fiunt impoſſibilia, ideoque ex hoc caſu omnino naſcuntur Genera quadraginta-ſeptem, qui numerus etiam major eſt quam ut ſingula hic recenſeri queant. Hactenus ergo nacti ſumus Genera *centum & undecim.*

## CASUS VII.

267. Si tres Factores inter ſe fuerint æquales, æquatio erit ejuſmodi

$y^3x + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$

Hic Factor $x$ præbet Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, ſi non fuerit $c = 0$; at, ſi $c = 0$, nec vero $f = 0$, Aſymtotam dat ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$; at, ſi $c = 0$, & $f = 0$, Aſymtotam dat ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$. Deinde Factor $y^3$, niſi fuerit $b = 0$, dat Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$; ſin autem $b = 0$, poſito $x$ infinito, fit $y^3 + ayx + dy + ex + g + \frac{cyy + fy + h}{x} = 0$. Hic, ſi non ſit $e = 0$, erit $y^3 + ayx + ex = 0$; unde, ſi nec $a = 0$, erit & $y^2 + ax = 0$ & $ay + e = 0$: ſimul ergo locum habet Aſymtota parabolica ſpeciei $uu = At$, & hyperbolica hac æquatione expreſſa $(ay + e)x - \frac{e^3}{a^3} - \frac{de}{a} - g + \frac{cee - afe + aah}{aax}$. Niſi ergo ſit $e^3 + aade + a^3g = 0$, hæc Aſymtota eſt ſpeciei $u = \frac{A}{t}$; contra vero ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$. At, ſi $a = 0$, non exiſtente $e = 0$, erit $y^3 + ex = 0$: quæ dat Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = At$. Sin autem ſit $e = 0$, & $a = 0$, fiet $y^3 + dy + g = 0$, quæ æquatio vel unicam præbet Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, vel tres ejuſdem ſpeciei, vel unam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, & unam ſpeciei $uu = \frac{A}{t}$; vel unam ſpeciei $u^3 = \frac{A}{t}$. Omnino ergo octo varietates occurrunt, quæ, per tres ex Factore $x$ ortas multiplicatæ, dabunt Genera viginti-quatuor. Ergo omnes caſus hactenus tractati dant Genera *centum triginta quinque.*

## CASUS VIII.

268. Si omnes Factores ſint inter ſe æquales, hæc æquatio locum habebit

$y^4 + ay^3x + byxx + kx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$

Hic, ſi non fuerit $k = 0$, prodit

### GENUS CXXXVI.

Unicam habens Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^4 = At^3$.

Sit $k = 0$, non vero $b = 0$, erit $y^4 + byxx + exx = 0$, hincque $y^3 + bxx = 0$, & $by + e = 0$; unde, pro Aſymtota recta $by + e = 0$, erit $(by + e)xx + \frac{e^4}{b^4} + \frac{ae^3x}{bb} + \frac{cee}{bb} - \frac{dex}{b} - \frac{ef}{b} + gx + h = 0$; ergo, niſi ſit $aee - bde + bbg = 0$, Aſymtota erit ſpeciei $u = \frac{A}{t}$; contra vero ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$; unde prodeunt

### GENUS CXXXVII.

Unam habens Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$, & unam hyperbolicam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, &

### GENUS CXXXVIII.

Unam habens Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$, & unam hyperbolicam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

269. Sit jam $k = 0$, $b = 0$, ut ſit

$y^4 + ay^3x + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0,$

ſi non ſit $e = 0$, erit $y^4 + ayyx + exx = 0$, quæ æquatio ſi fuerit $aa$ minor quam $4e$, eſt impoſſibilis, ſin $aa$ major quam

Digitized by Google

$4e$, duas præbet Aſymtotas parabolicas ad eundem Axem relatas, ſpeciei $uu = At$; ſin $aa = 4e$, hæ duæ Parabolæ in unam coeunt, quibus Genera CXXXIX. CXL. & CXLI. conſtituuntur. 

At, ſi $e = 0$, ut habeatur hæc æquatio

$$y^4 + ayyx + cyy + dyx + fy + gx + h = 0,$$

ſi non ſit $a = 0$; erit $y^4 + ayyx + cyy + dyx + gx = 0$, ergo & $yy + ax = 0$, & $y =$ conſtanti, erit $ayy + dy + g = 0$, unde $y$ vel duos habet valores diverſos, vel æquales, vel nullum realem. Caſu primo Curva, præter unam Aſymtotam parabolicam, habebit duas Aſymtotas parallelas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$; ſecundo unam ſpeciei $uu = \frac{A}{t}$; tertio nullam: unde iterum tria Genera conſtituuntur nempe CXLII. CXLIII. & CXLIV.

270. Sit nunc etiam $a = 0$, ut ſit

$$y^4 + cyy + dyx + fy + gx + h = 0.$$

Hic, ſi non ſit $d = 0$, Curva habebit Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = At$, & unam rectam æquatione $dy + g = 0$, contentam, ſpeciei $u = \frac{A}{t}$. Denique ſi & $d = 0$, Curva unam habebit Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^4 = At$: ſicque omnino Linearum quarti ordinis conſtituta ſunt Genera *centum quadraginta-ſex*; quæ autem ſingula plerumque plures Species notabiliter differentes ſub ſe complectuntur.

271. Ex his jam clare perſpicitur quantopere Generum numerus in Lineis quinti, altiorisve ordinis, multiplicetur, ut recenſio, qualem pro ordine tertio fecimus, inſtitui prorſus nequeat, niſi quis integrum volumen huic operi deſtinare velit. Quod autem ad primarias proprietates Linearum quarti altiorisve ordinis attinet, eæ ex æquatione generali ſimili modo derivabuntur, quo ſupra in Lineis tertii ordinis ſumus uſi, neque idcirco earum explicationi immorabimur.

Digitized by Google

## CAPUT XII.

### *De inveſtigatione figuræ Linearum Curvarum.*

272. Quæ in his Capitibus ſunt expoſita, inſerviunt figuræ Linearum curvarum in infinitum extenſarum cognoſcendæ. Cujuſmodi vero figuram habeat quæpiam Linea curva in ſpatio finita, ſæpe numero difficillimum eſt ex æquatione cognoſcere. Oportet enim ad hoc pro quavis Abſciſſa finita valores Applicatæ reſpondentes ſingulos ex æquatione eruere, atque reales ab imaginariis diſcernere: quod negotium, ſi æquatio ſit altioris gradus, plerumque vires Analyſeos cognitæ ſuperat. Quod ſi enim Abſciſſæ valor quinque cognitus tribuatur, Applicata in æquatione incognitæ vicem ſuſtinebit. Hincque a numero dimenſionum, quem Applicata obtinet, pendebit æquationis reſolutio. Negotium autem hoc per reductionem æquationis ad formam ſimpliciorem, dum & Axis commodiſſimus, & inclinatio Coordinatarum aptiſſima aſſumitur, valde ſublevari poteſt: tum etiam quia perinde eſt, utra Coordinatarum pro Abſciſſa accipiatur, labor maxime diminuetur, ſi ea Coordinatarum, cujus pauciſſimæ dimenſiones in æquatione occurrunt, pro Applicata aſſumatur.

273. Sic, ſi figuras Linearum tertii ordinis, quæ ad Speciem primam pertinent, inveſtigare velimus, aſſumemus æquationem pro hac Specie ſimpliciſſimam, §. 258. exhibitam, & ex Coordinatis $t$ & $u$ priorem $t$ pro Applicata, alteram vero $u$ pro Abſciſſa, quia $t$ duas tantum dimenſiones habet. Hujuſmodi ergo æquationis formam habebimus,

$$yy = \frac{2by + axx + cx + d - nnx^3}{x}$$

quæ reſoluta dat

$$y = \frac{b \pm \sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)}}{x}$$ CAP. XII.

exiſtente neque $b$ neque $n = 0$.

274. Qui ergo valores ipſius $x$ Functioni $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ valorem affirmativum induunt, iis duplex Applicata reſpondet; quibus caſibus vero hæc Functio evaneſcit, iiſdem unica Applicata $y$ Abſciſſæ $x$ convenit, ſeu binæ Applicatæ inter ſe fiunt æquales. At, ſi Functio illa valorem negativum obtinet, tum Abſciſſæ nulla prorſus Applicata reſpondet. Sed valores iſtius Functionis, ſi fuerint affirmativi, in negativos abire nequeunt, niſi prius facti ſint æquales, ſeu Functio evanuerit. Caſus igitur potiſſimum erunt conſiderandi, quibus Functio $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ fit $= 0$; quod quidem certo duobus evenit caſibus: quoniam, ſi $x$ certum limitem ſive affirmative ſive negative tranſgrediatur, ejus valor fit negativus. Hinc tota Curva determinato Abſciſſæ ſpatio reſpondebit, ultra quod omnes Applicatæ fiant imaginariæ.

275. Ponamus expreſſionem $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ duos tantum habere Factores reales, ſeu duobus tantum caſibus evaneſcere poſſe; quod eveniat, ſi Abſciſſa determinetur in punctis $P$ & $S$, ubi unica tantum Applicata reperiatur. Per totum ergo ſpatium $PS$ Applicatæ erunt geminæ & reales, extra ſpatium vero $PS$ omnes Applicatæ erunt imaginariæ: ideoque tota Curva intra Applicatas $Kk$ & $Nn$ jacebit. Applicata vero in initio Abſciſſarum $A$ erit Aſymtota Curvæ, quæ præterea Curvam in puncto quopiam ſecabit; ſi enim ponatur $x = 0$, fiet $\sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)} = b + \frac{dx}{2b}$ unde erit $y = \frac{b \pm (b + \frac{dx}{2b})}{x}$, hoc eſt, erit vel $y = \infty$, vel $y = \frac{-d}{2b}$. Curva ergo hoc caſu ejuſmodi habet formam qualem *Figura* 50. repræſentat. TAB. XIII. *Fig.* 49.

276. Ponamus expreſſionem $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ quatuor habere Factores ſimplices reales inæquales; ideoque quatuor caſibus evaneſcere. In totidem ergo locis $P$, $Q$, $R$ TAB. XIII.

Lib. II. & $S$ Applicatæ Curvam in unico puncto ſtringent. Cum igitur Applicatæ per Axis ſpatium $XP$ fuiſſent imaginariæ, nunc per ſpatium $PQ$ erunt reales: tum vero per ſpatium $QR$ erunt iterum imaginariæ, ac per $RS$ rurſus reales. Extra $S$ vero verſus $Y$ denuo fient imaginariæ. Hinc Curva conſtabit duabus partibus a ſe invicem ſeparatis, quarum altera intra rectas $Kk$ & $Ll$, altera intra rectas $Mm$ & $Nn$ continetur. Cum vero in Abſciſſarum initio $A$ Applicatæ ſint reales, neceſſe eſt ut id vel in Axis intervallo $PQ$ vel $RS$ ſit ſitum. Hoc ergo
Tab. XIV. caſu Curva figuram habebit, qualem *Figura* 51. oſtendit, ſcilicet conſtabit Ovali a reliqua Curva ad Aſymtotam $DE$ relata, diſtante, quæ vocatur Ovalis conjugata.

277. Si duæ radices fiant inter ſe æquales, vel puncta $P$ & $Q$, vel $Q$ & $R$, vel $R$ & $S$, convenient. Verum, ſi prius eveniat, quia $A$ intra $P$ & $Q$ jacet, utraque radix deberet eſſe $x$; quod quia $b$ deeſſe nequit, fieri non poteſt. Sin autem puncta $R$ & $S$ conveniant, Ovalis conjugata fiet infinite parva, & abibit in Punctum conjugatum. At, ſi puncta $Q$ & $R$ conveniant, Ovalis cum reliqua Curva
Tab. XIV. ita conjungetur ut prodeat Curva nodata *Figuræ* 52. Quod ſi vero tres radices congruant, ſeu puncta $Q$, $R$ & $S$ conveniant, tum nodus in cuspidem acutiſſimam evaneſcet,
Tab. XIX. qualem *Figura* 53. repræſentat. Sic igitur quinque diverſæ varietates in ſpecie prima locum habent, ex quibus Newtonus totidem conſtituit Species.

278. Simili modo ſubdiviſiones reliquarum Specierum a Newtono ſunt factæ, quoniam omnes æquationes ita ſunt comparatæ, ut altera Coordinata plures duabus non habeat diviſiones. Quando vero altera Coordinata unicam habet dimenſionem, forma Curvæ facillime cognoſcetur. Æquatio enim erit hujuſmodi $y = P$, exiſtente $P$ Functione quapiam rationali Abſciſſæ $x$; quinque ergo ipſi $x$ valor tribuatur, Applicata quoque ſemper unum obtinet valorem; ideoque Curva continuo tractu Axem utrinque in infinitum comitabitur. Si Functio $P$ ſit fracta, fieri poteſt, ut Applicata in uno pluribuſve

Digitized by Google

buſve locis fiat infinita, ideoque Curvæ Aſymtotam exhibeat, quod evenit ubi denominator Functionis $P$ evaneſcit. 

279. Ponatur ergo $y = \frac{P}{Q}$, atque iſtas Applicatas infinitas oſtendent omnes radices reales æquationis $Q = 0$: quælibet enim radix hujus æquationis, puta $x = f$, declarat, ſi ſumatur Abſciſſa $x = f$, fore Applicatam $y$ infinitam, quia fit $Q = 0$. Tum vero patet, ſi fuerint Applicatæ $y$ affirmativæ, dum eſſet $x$ major quam $f$, eaſdem, facto $x$ minore quam $f$, futuras eſſe negativas; ideoque Applicata erit Aſymtota ſpeciei $u = \frac{A}{t}$: hocque de omnibus Factoribus inæqualibus eſt tenendum. Sin autem denominator $Q$ duos habuerit Factores æquales, puta $(x - f)^2$, tum ſi Applicatæ ſint affirmativæ ſumto $f$ majore quam $x$, manebunt affirmativæ ſi ponatur $x$ minor $f$, eritque Applicata $y$, facto $x = f$, Aſymtota ſpeciei $uu = \frac{A}{t}$. At, ſi denominator $Q$ tres habuerit Factores æquales, nempe $(x - f)^3$, tum Applicatæ ante & poſt illam quæ fit infinita, diverſa habebunt ſigna, uti caſu primo.

280. Poſt has æquationes facillime tractantur, quæ in hac forma continentur $yy = \frac{2Py - R}{Q}$, exiſtentibus $P$, $Q$, & $R$ Functionibus quibuſcunque integris Abſciſſæ $x$. Cuique igitur Abſciſſæ $x$ vel geminæ convenient Applicatæ vel nulla; duæ ſcilicet prodeunt Applicatæ, ſi fuerit $PP$ major quam $QR$, & nulla, ſi $PP$ minor quam $QR$: in quolibet ergo limite, qui Applicatas reales ab imaginariis ſeu nullis dirimit, erit $PP = QR$; ideoque fit $y = \frac{P}{Q}$, ſeu hæc Applicata Curvam in unico puncto ſtringet vel tanget. Ad Curvæ ergo formam cognoſcendam conſideretur æquatio $PP - QR = 0$, cujus ſingulæ radices reales dabunt loca, ubi Applicatæ Curvam in unico puncto ſtringunt. Notentur hæc puncta in Axe,

LIB. II. atque, ſi omnes radices fuerint inæquales, Axis partes inter hæc puncta contentæ alternatim habebunt Applicatas geminas reales, & imaginarias, ſicque Curva tot conſtabit partibus a ſe invicem ſejunctis, quot hujuſmodi alternationes adeſſe deprehenduntur, unde Ovales conjugatæ originem ducunt.

281. Si æquationis $PP - QR = 0$, duæ radices fiant æquales, tum illorum in Axe notatorum punctorum duo convenient, hincque in Axe portio vel imaginarias habens Applicatas vel reales evaneſcet. Priori caſu Curva prodibit nodata uti in *Figura* 52; poſteriori Ovalis conjugata in punctum conjugatum evaneſcet. Quod ſi autem illa æquatio tres habuerit radices æquales, Nodus fiet infinite parvus atque in Cuſpidem abibit, ut in *Figura* 53; ſi quatuor affuerint radices æquationis æquales, vel duæ Ovales ſeparatæ concreſcent in punctum, vel in ipſa Cuſpide dabitur Nodus, ſeu duæ Cuſpides ad verticem oppoſitæ. Sin quinque radices æquales affuerint, novæ fere formæ non proveniunt; Cuſpis enim oritur in qua non una, ut ante, ſed duæ Ovales in punctum coaleſcunt; neque etiam major radicum æqualium multitudo novum diſcrimen in figuris reſultantibus producit.

TAB. XIV.

TAB. XIV.

282. Nodus ſeu interſectio duorum Curvæ ramorum vocari etiam ſolet PUNCTUM DUPLEX, propterea quod Linea recta Curvam in eo puncto ſecans; eam in duobus punctis ſecare cenſenda eſt. Atque, ſi per Nodum alius Curvæ ramus tranſiret, tum in hac interſectione naſcetur punctum Curvæ *triplex*; punctum vero *quadruplex* orietur, ſi duo puncta duplicia conveniunt, ex quo geneſis & natura punctorum quorumvis *multiplicium* perſpicitur. Erit ergo etiam Ovalis evaneſcens, ſeu punctum conjugatum, punctum duplex, pariter ac Cuſpis, quæ oritur a puncto conjugato cum reliqua Curva connexo.

283. Si æquatio, qua Applicata $y$ per Abſciſſam $x$ exprimitur, ſit cubica vel altioris gradus, ita ut $y$ æquetur Functioni multiformi ipſius $x$; tum unicuique Abſciſſæ convenient vel tot Applicatæ, quot $y$ in æquatione habet dimenſiones, vel earum numerus minuetur binario vel quaternario, vel ſenario

&c. Perpetuo ergo binæ applicatæ ſimul imaginariæ eſſe incipiunt, atque prius quam imaginariæ evadunt, inter ſe fiunt æquales. Hinc ex tranſitione ab imaginariis ad reales plures naſcuntur varietates, quæ autem cum his, quas modo explicavimus; vel conveniunt vel ex iis ipſis ſunt compoſitæ. Quod ſi autem pro plurimis Abſciſſis tam affirmativis quam negativis quærantur omnes Applicatæ valores, tum per hæc puncta inventa Curva facile delineabitur, ejuſque figura cognoſcetur. CAP. XII.

284. Illuſtremus hæc exemplo, quod, quamvis ortum ſit ex æquatione altioris gradus, tamen Applicata $y$ per ſolas radices quadratas exprimatur. Sit nimirum

$$2y = \pm\sqrt{(6x - xx)} \pm \sqrt{(6x + xx)} \pm \sqrt{(36 - xx)}$$

ex qua æquatione cuivis Abſciſſæ octuplex Applicata reſpondet. Perſpicuum autem eſt, ſi Abſciſſa $x$ ſtatuatur negativa, tum Applicatam fore imaginariam; quod idem evenit ſi Abſciſſa $x$ ſumatur major quam $6$: ex quo tota Curva intra limites $x = 0$, & $x = 6$ continebitur. Ponantur ergo pro $x$ ſucceſſive valores, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, eritque

| ſi | $x=0$ | $x=1$ | $x=2$ | $x=3$ | $x=4$ | $x=5$ | $x=6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{(6x-xx)}$ | 0,000 | 2,235 | 2,828 | 3,000 | 2,828 | 2,235 | 0,000 |
| $\sqrt{(6x+xx)}$ | 0,000 | 2,645 | 4,000 | 5,196 | 6,324 | 7,416 | 8,484 |
| $\sqrt{(36-xx)}$ | 6,000 | 5,916 | 5,656 | 5,196 | 4,470 | 3,316 | 0,000 |
| ſumma | 6,000 | 10,796 | 12,484 | 13,392 | 13,622 | 12,967 | 8,484 |
| hinc $y$ ſi | | | | | | | |
| $+\,+\,+$ | 3,000 | 5,398 | 6,242 | 6,696 | 6,811 | 6,483 | 4,242 |
| $-\,+\,+$ | 3,000 | 3,163 | 3,414 | 3,696 | 3,983 | 4,248 | 4,242 |
| $+\,-\,+$ | 3,000 | 2,753 | 2,242 | 1,500 | 0,487 | 0,933 | -4,242 |
| $+\,+\,-$ | -3,000 | -0,518 | 0,586 | 1,500 | 2,341 | 3,167 | 4,242 |

Reliquæ quatuor ſignorum permutationes ab his tantum ratione ſignorum differunt. Hinc cuilibet Abſciſſæ octuplex Applicata reſpondet, quæ ſi in figura exhibeantur, prodibit Linea curva TAB. XIV. *Fig.* 54.

LIB. II. duplici plexu $AFBEcagbcDA$, & $afbECAGBCDa$ conſtans, duas habens Cuſpides in $A$ & $a$, & puncta duplicia ſeu ramorum interſectiones quatuor in $D$, $E$, $C$ & $c$.

## CAPUT XIII.

### *De Affectionibus Linearum Curvarum.*

285. QUEMADMODUM ſupra ramorum in infinitum extenſorum indolem ita deſcripſimus, ut Lineam rectam, vel Curvam ſimpliciorem, aſſignaverimus, quæ cum illa Curva in infinito confunderetur; ita in hoc Capite conſtituimus quamvis Curvæ portionem in ſpatio finito exiſtentem examini ſubjicere, atque rectam vel Curvam ſimpliciorem inveſtigare, quæ cum illa Curvæ portione ſaltem per minimum ſpatium congruat. Ac primo quidem patet omnem Lineam rectam, quæ Curvam tangit, in eo loco ubi tangit, cum tractu Lineæ curvæ congruere, ſeu cum Linea curva duo ad minimum puncta communia habere. Tum vero etiam aliæ Lineæ curvæ exhiberi poſſunt, quæ cum data Curvæ portione accuratius congruant, eamque quaſi oſculentur. His autem cognitis, ſtatus Lineæ curvæ in quovis loco, ejuſque affectiones clariſſime erunt perſpectæ.

TAB. XV. Fig. 55. 286. Sit igitur propoſita æquatio quæcunque inter Coordinatas $x$ & $y$ pro Curva quapiam. Tribuatur Abſciſſæ $x$ valor quiſpiam $AP = p$, & quærantur valores Applicatæ $y$ huic Abſciſſæ reſpondentes, qui ſi plures fuerint, ſumatur pro lubitu unus $PM = q$, eritque $M$ punctum in Curva, ſeu punctum per quod Curva tranſibit. Tum vero, ſi in æquatione inter $x$ & $y$ propoſita, loco $x$ ſcribatur $p$, & $q$ loco $y$, omnes æquationis termini ſe mutuo tollent, ita ut nihil remaneat. Jam, ad naturam illius Curvæ portionis, quæ per punctum $M$ tranſit, indagandam, ex $M$ ducatur recta $Mq$

Digitized by Google

Axi $AP$ parallela, quæ nunc pro Axe accipiatur, & vocetur hic nova Abſciſſa $Mq = t$, Applicata $qm = u$. Quia igitur punctum $m$ pariter in Curva eſt poſitum, ſi $mq$ uſque ad priorem Axem in $p$ producatur, atque $Ap = p + t$ in locum ipſius $x$, & $pm = q + u$ in locum ipſius $y$ ſubſtituatur, æquatio pariter identica prodire debet.

287. Facta autem hac ſubſtitutione in æquatione inter $x$ & $y$ propoſita, omnes termini, in quibus neque $t$ nec $u$ ineſt, ſe mutuo ſponte deſtruent, illique termini, qui novas Coordinatas $t$ & $u$ continent, ſoli ſupererunt. Hinc ergo ejuſmodi prodibit æquatio

$$o = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Euu + Ft^3 + Gt^2u + Htuu + \&c.;$$

ubi $A$, $B$, $C$, $D$, &c. ſunt quantitates conſtantes ex conſtantibus primæ æquationis & ipſis $p$ & $q$, quas nunc pro conſtantibus habemus, compoſitæ. Iſta igitur nova æquatione natura ejuſdem Curvæ exprimitur, verum ad Axem $Mq$ refertur, & in quo ipſum Curvæ punctum $M$ pro initio Abſciſſarum aſſumitur.

288. Ac primo quidem patet, ſi ponatur $Mq = t = o$, tum quoque fore $qm = u = o$, quia punctum $m$ in $M$ incidit. Deinde, quia tantum minimam Curvæ portionem circa $M$ verſantem indagare volumus, hoc impetrabimus, ſi pro $t$ valores quam minimos aſſumamus, quo caſu quoque $qm = u$ valorem habebit minimum; naturam enim Arcus $Mm$ quaſi evaneſcentis tantum deſideramus. Quod ſi vero pro $t$ & $u$ ſumantur valores quam minimi, termini $tt$, $tu$, & $uu$ multo adhuc erunt minores, atque ſequentes $t^3$, $t^2u$, $tuu$, $u^3$, &c., multo quoque erunt minores quam illi, & ita porro: quam ob cauſam, cum termini minimi præ aliis quaſi infinite majoribus omitti queant, remanebit iſta æquatio $o = At + Bu$, quæ eſt æquatio pro Linea recta $M\mu$ per punctum $M$ tranſeunte, atque indicat hanc rectam, ſi punctum $m$ ad $M$ proxime accedat, cum Curva congruere.

LIB. II. 289. Erit ergo hæc recta $M\mu$ Tangens Curvæ in loco $M$, ideoque hinc ad quodvis punctum Curvæ $M$ Tangens $\mu MT$ duci poteſt. Scilicet, cum ex æquatione $At + Bu = 0$, ſit $\frac{u}{t} = \frac{-A}{B} = \frac{q\mu}{Mq}$, erit $q\mu : Mq = MP : PT = -A : B$. Ergo, cum ſit $PM = q$, fiet $PT = \frac{-Bq}{A}$: vocari autem hæc Axis portio $PT$ ſolet SUBTANGENS. Ex his ergo hæc deducitur.

## REGULA

### *Pro invenienda Subtangente.*

In æquatione pro Curva, poſtquam Abſciſſæ $x = p$ inventa fuerit ſatisfacere Applicata $y = q$, ponatur $x = p + t$, & $y = q + u$; ex terminis autem, qui per ſubſtitutionem oriuntur, ii tantum retineantur, in quibus $t$ & $u$ unicam dimenſionem tenent, reliquis omnibus neglectis. Sicque ad duos tantum terminos $At + Bu = 0$ pervenietur: unde, cognitis $A$ & $B$, erit Subtangens $PT = \frac{-Bq}{A}$.

## EXEMPLUM I.

*Sit propoſita Curva* Parabola, *cujus natura hac exprimitur æquatione* $yy = 2ax$, *exiſtente* AP *Axe principali & A Vertice.*

Sumatur $AP = p$; &, ſi vocetur $PM = q$, erit $qq = 2ap$, ſeu $q = \sqrt{2ap}$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$, eritque $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at$: unde, per regulam, hi tantum termini $2qu = 2at$ retineantur, qui dant $at - qu = 0$, $\frac{u}{t} = \frac{a}{q} = \frac{-A}{B}$, erit ergo Subtangens $PT = \frac{qq}{a} = 2p$, ob $qq = 2ap$. Hinc Subtangens $PT$ erit dupla Abſciſſæ $AP$.

EXEMPLUM II.

*Sit Curva* Ellipſis *Centro* A *deſcripta, cujus æquatio eſt* yy $= \frac{bb}{aa}(aa - xx)$, *ſeu* $aayy + bbxx = aabb$.

Sumta ergo $AP = p$, &, poſita $PM = q$, erit $aaqq + bbpp = aabb$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$; &, quoniam ii tantum termini retineri debent, in quibus $t$ & $u$ unicam habent dimenſionem, reliqui ſtatim omitti poſſunt; fietque $2aaqu + 2bbpt = 0$, unde $\frac{u}{t} = \frac{-bbp}{aaq} = \frac{-A}{B}$. Erit ergo Subtangens $PT = \frac{-B}{A}q = \frac{-aaqq}{bbp} = \frac{-aa+pp}{p}$: quæ expreſſio, cum ſit negativa, indicat punctum $T$ in partem contrariam cadere. Ceterum hæc expreſſio egregie convenit cum determinatione Tangentium Ellipſis ſupra tradita.

EXEMPLUM III.

*Sit propoſita* Linea tertii ordinis *Speciei ſeptimæ* $yyx = axx + bx + c$.

Sumta ergo $AP = p$, & poſita $PM = q$, erit $pqq = app + bp + c$. Jam ſtatuatur $x = p + t$ & $y = q + u$, eritque $(p+t)(qq + 2qu + uu) = a(pp + 2pt + tt) + b(p+t) + c$. Rejectis omnibus terminis ſuperfluis, erit $2pqu + qqt = 2apt + bt$, unde fit $\frac{u}{t} = \frac{2ap + b - qq}{2pq} = \frac{-A}{B}$; ideoque Subtangens $PT = \frac{-B}{A}q = \frac{2pqq}{2ap + b - qq} = \frac{2app + 2bp + 2c}{2ap + b - qq} = \frac{2ap^3 + 2bpp + 2cp}{app - c}$, vel $PT = \frac{2ppqq}{app - c}$.

290. Cognita ergo hoc modo Tangente Curvæ, ſimul cognoſcitur directio, quam Curva ſequitur in puncto $M$. Linea enim Curva aptiſſime conſiderari poteſt tanquam via, quam deſcribit punctum continuo promotum cum variata continuo

Digitized by Google

motus directione. Ideoque punctum, quod Curvam $M\mu$ motu ſuo deſcribit in $M$ promovebitur ſecundum directionem Tangentis $M\mu$; quam directionem ſi conſervaret, deſcriberet rectam $M\mu$: at e veſtigio directionem motus inflectit, ſi quidem Lineam curvam deſcribit: unde ad tractum Lineæ curvæ cognoſcendum in ſingulis punctis poſitionem Tangentis definire oportet, id quod facile fit methodo hic tradita, neque enim ulla oſtenditur difficultas, dummodo æquatio pro Curva propoſita fuerit rationalis atque a fractionibus libera. Ad talem autem formam æquationes omnes ſemper reduci poſſunt. Sin autem æquatio fuerit vel irrationalis vel fractionibus implicata, neque eam ad formam rationalem & integram reducere vacaverit, tum eadem quidem methodus, at cum moderatione quadam, adhiberi poteſt, quæ ipſa moderatio *Calculum differentialem* produxit; quam ob rem methodum inveniendi Tangentes, ſi æquatio pro Curva propoſita non fuerit rationalis & integra, in calculum differentialem reſervabimus.

291. Hinc ergo innoteſcit inclinatio Tangentis $M\mu$ ad Axem $AP$, ſeu ejus parallelam $Mq$. Cum enim ſit $q\mu : Mq = -A : B$, ſi Coordinatæ fuerint orthogonales ideoque angulus $Mq\mu$ rectus, erit $\frac{-A}{B}$ Tangens anguli $qM\mu$; ſin autem Coordinatæ fuerint obliquangulæ, tum ex angulo $Mq\mu$ dato & ratione laterum $Mq$, $q\mu$ per Trigonometriam reperietur angulus $qM\mu$. Patet autem, ſi in æquatione reſultante $At + Bu = 0$, fuerit $A = 0$, tum angulum $qM\mu$ evaneſcere, ideoque Tangentem $M\mu$ fore Axi $AP$ parallelam. Sin autem fuerit $B = 0$, tum Tangens $M\mu$ Applicatis $PM$ erit parallela, ſeu ipſa Applicata $PM$ Curvam in puncto $M$ tanget.

292. Inventa Tangente $MT$, ſi ad eam in puncto contactus $M$ ducatur normalis $MN$, erit hæc ad ipſam Curvam ſimul normalis; cujus propterea poſitio quovis caſu facile reperitur. Commodiſſime autem exprimitur, ſi Coordinatæ $AP$ & $PM$ fuerint orthogonales, tum enim erunt triangula $Mq\mu$ & $MPN$ ſimilia;

ſimilia, ideoque $Mq : q\mu = MP : PN$, ſeu $-B : A = q : PN$; unde fit $PN = \frac{-Aq}{B}$. Vocari autem hæc Axis portio $PN$, inter Applicatam & Normalem $MN$ intercepta, ſolet Subnormalis. Hæc igitur Subnormalis, ſi Coordinatæ fuerint orthogonales, ex inventa Subtangente $PT$ facillime definitur; erit enim $PT : PM = PM : PN$, ſeu $PN = \frac{PM^2}{PT}$. Præterea vero, ſi angulus $APM$ fuerit rectus, erit ipſa tangens $MT = \surd(PT^2 + PM^2)$ & ipſa normalis $MN = \surd(PM^2 + PN^2)$; ſeu, cum ſit $PT : TM = PM : MN$, erit $MN = \frac{PM.TM}{PT} = \frac{PM}{PT}\surd(PT^2 + PM^2)$. Cap. XIII.

293. Quoniam vidimus, ſi in æquatione $At + Bu = 0$, fuerit vel $A = 0$ vel $B = 0$, tum Tangentem fore vel Axi vel Applicatis parallelam; ſupereſt caſus, quo uterque coëfficiens $A$ & $B$ ſimul ſit $= 0$, conſiderandus. Hoc ergo cum evenit, in æquatione ſupra (§. 286.) inventa, ſequentes termini, in quibus $t$ & $u$ duas obtinent dimenſiones, non amplius præ his $At + Bu$, (qui ipſi evaneſcunt,) negligi poterunt. Hanc ob rem conſideranda veniet hæc æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$, neglectis ſequentibus terminis; quippe qui præ his, ſi $t$ & $u$ ſtatuantur infinite parva, evaneſcunt. Ex hac igitur æquatione, uti ex generali, manifeſtum eſt, ſi ponatur $t = 0$, fore & $u = 0$, ideoque $M$ eſſe punctum in Curva, quod quidem Hypotheſi eſt conſentaneum.

294. Cum igitur hæc æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$ ſtatum Curvæ prope punctum $M$ declaret; manifeſtum eſt, ſi fuerit $DD$ minor quam $4CE$, tum æquationem fore imaginariam, niſi ſint $t$ & $u = 0$. Hoc igitur caſu punctum $M$ quidem ad Curvam pertinebit, verum erit ſejunctum a reliqua Curva; eritque ideo Ovalis conjugata in punctum evaneſcens, cujuſmodi caſum in Capite præcedente notavimus. Hic igitur ne idea quidem Tangentis locum habet; quia, ſi Tan-

 gens eſt recta duo puncta proxima cum Curva habens communia, punctum a recta tangi hoc modo non poteſt. Hoc itaque pacto punctum conjugatum, ſi quod datur in Curva quapiam, agnoſcetur atque a reliquis Curvæ punctis diſcernetur.

Tab. XV. Fig. 56. 295. Quod ſi autem fuerit $DD$ major quam $4CE$, æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$ reſolubilis erit in duas æquationes hujus formæ $\alpha t + \beta u = 0$, quarum utraque in Curvæ naturam æque competit. Cum igitur utraque poſitionem Tangentis ſeu directionem Curvæ in puncto $M$ exhibeat, neceſſe eſt ut duo Curvæ rami ſe in puncto $M$ decuſſent, ibique punctum duplex conſtituant. Sumta ſcilicet $Mq = t$, ſint $q\mu$ & $q\nu$ ambo valores ipſius $u$, quos illa æquatio præbet, atque rectæ $M\mu$ & $M\nu$ erunt ambæ Tangentes Curvæ in puncto $M$. In $M$ ergo erit interſectio duorum Curvæ ramorum, quorum alter ſecundum $M\mu$, & alter ſecundum $M\nu$ dirigitur. Cum igitur punctum conjugatum pariter pro puncto duplici ſit habendum, hæc æquatio $Ctt + Dtu + Euu = 0$, ſemper punctum duplex indicabit, quemadmodum æquatio $At + Bu = 0$, quoties locum habet, punctum Curvæ tantum ſimplex declarat.

296. Sin autem fuerit $DD = 4CE$, tum ambæ iſtæ Tangentes $M\mu$ & $M\nu$ coincident, & angulus $\mu M \nu$ evaneſcet; ex quo intelligitur duos Curvæ ramos in $M$ non ſolum concurrere, ſed etiam eandem directionem habere, ideoque ſe invicem tangere; quo caſu punctum $M$ nihilominus erit duplex, quia recta per hoc punctum ducta Curvam hoc loco in duobus punctis ſecare eſt cenſenda. Quando ergo in æquatione, quam § 286. obtinuimus, ambo coëfficientes primi $A$ & $B$ evaneſcunt, tum concludenda eſt Curva in $M$ punctum duplex habere, cujus tres dantur Species diverſæ; vel Ovalis in punctum evaneſcens ſeu punctum conjugatum, vel duorum Curvæ ramorum interſectio mutua ſeu nodus, vel duorum Curvæ ramorum contactus, quas diverſas puncti duplicis Species triplex æquationis $0 = Ctt + Dtu + Euu$ conſtitutio definit.

Digitized by Google

197. Si præter coëfficientes $A$ & $B$, etiam hi tres $C, D,$ & $E$ omnes evaneſcant, tum ſequentes ſumi debebunt termini, in quibus $t$ & $u$ tres obtinent dimenſiones, eritque $Ft^3 + Gttu + Htuu + Iu^3 = 0$. Quæ æquatio ſi unicum habeat Factorem ſimplicem realem, hic oſtendet unum Curvæ ramum per punctum $M$ tranſeuntem ejuſque ſimul directionem ſeu Tangentem; bini vero reliqui Factores imaginarii in ipſo puncto $M$ Ovalem evaneſcentem, arguent. Sin autem omnes radices illius æquationis fuerint reales, hinc cognoſcetur tres Curvæ ramos ſe in eodem puncto $M$ vel decuſſare vel tangere, prout illæ radices fuerint vel inæquales vel æquales. Quicquid horum evenerit, Curva in $M$ ſemper habebit punctum triplex, atque recta per $M$ ducta Curvam ſimul in tribus punctis ſecare putanda eſt. CAP. XIII.

198. Quod ſi præter omnes coëfficientes præcedentes etiam hi quatuor $F, G, H,$ & $I$ evaneſcant; tum ad naturam puncti Curvæ $M$ cognoſcendam, contemplari oportebit terminos æquationis ſequentes, in quibus $t$ & $u$ quatuor habeant dimenſiones: unde punctum $M$ quadruplex erit judicandum. In eo enim vel duæ Ovales conjugatæ coaleſcunt; quod evenit ſi æquationis quarti gradus omnes radices fuerint imaginariæ. Vel in $M$ interſectio ſeu contactus duorum Curvæ ramorum cum puncto conjugato; quod evenit ſi duæ radices fuerint reales, duæ reliquæ vero imaginariæ. At in $M$ denique erit interſectio quatuor Curvæ ramorum, ſi omnes radices æquationis fuerint reales; interſectio autem vel duorum vel trium vel omnium quatuor abibit in contactum, ſi duæ tres vel omnes quatuor radices fiant æquales. Simili autem modo in judicio erit progrediendum, ſi etiam his terminis, ubi $t$ & $u$ quatuor obtinent dimenſiones, evaneſcentibus, procedendum erit ad terminos quinque ulteriorumve dimenſionum.

199. His perpenſis, facile erit æquationem generalem pro omnibus Curvis invenire, quæ non ſolum per punctum $M$ tranſeant, ſed etiam in $M$ habeant punctum vel ſimplex vel



Digitized by Google

duplex, vel triplex, vel totuplex, prout quis voluerit. Poſitis enim $AP = p$, $PM = q$, ac denotantibus $P$, $Q$, $R$, $S$, &c. Functiones quaſcunque Coordinatarum $x$ & $y$, manifeſtum eſt hanc æquationem $P(x-p) + Q(y-q) = 0$, exprimere Curvam per punctum $M$ tranſeuntem; ſi enim ponatur $x = AP = p$, fiet $y = PM = q$; dummodo neque $P$ per $y-q$, nec $Q$ per $x-p$ fuerit diviſibile, vel dummodo hi Factores $x-p$ & $y-q$, a quibus tranſitus Curvæ per punctum $M$ pendet, ex æquatione per diviſionem non eliminentur. Perſpicuum autem eſt omnes Curvas, quæ quidem per punctum $M$ tranſeant, in iſta æquatione $P(x-p) + Q(y-q) = 0$, contineri; erit vero $M$ punctum ſimplex, ſi hæc æquatio non fuerit ejus formæ, qualem pro punctis multiplicibus mox exhibebimus.

300. Si $M$ debeat eſſe punctum duplex, æquatio pro Curva in hac forma generali continebitur $P(x-p)^2 + Q(x-p)(y-q) + R(y-q)^2 = 0$, dummodo hæc forma per diviſionem non pereat. Perſpicitur hinc in Lineas ſecundi ordinis punctum duplex cadere non poſſe, quo enim illa æquatio ſecundi tantum ſit, neceſſe eſt ut $P$, $Q$, & $R$ ſint quantitates conſtantes; tum autem æquatio non erit pro Linea curva, ſed pro duabus rectis. Sin autem $P$, $Q$, $R$ ſint Functiones primi ordinis, ut $\alpha x + \beta y + \gamma$, tum Lineæ habebuntur tertii ordinis in $M$ punctum duplex habentes. At vero Linea tertii ordinis, niſi ex tribus rectis conſtet, plus uno puncto duplici habere nequit. Ponamus enim dari duo puncta duplicia, atque per ea Lineam rectam duci; hæc Linea recta Curvam in quatuor punctis ſecaret, quod naturæ Linearum tertii ordinis adverſatur. Linea quarti ordinis duo tantum habebit puncta duplicia; Linea quinti ordinis plura tribus habere non poterit, & ita porro.

301. Sit $M$ punctum Curvæ triplex, atque natura Lineæ curvæ hac exprimetur æquatione $P(x-p)^3 + Q(x-p)^2(y-q) + R(x-p)(y-q)^2 + S(y-q)^3 = 0$. Hæc æquatio igitur ſi Lineam curvam definiat, tertium ordinem

Digitized by Google

ſuperabit; namque ſi $P$, $Q$, $R$, & $S$ eſſent conſtantes, quod Linearum tertii ordinis natura exigit, tum æquatio tres haberet Factores formæ $\alpha(x-p)+\beta(y-q)$, ideoque foret pro tribus rectis. In Curvas ergo quarto ordine ſimpliciores punctum triplex non cadit; neque Lineæ quinti ordinis plus uno puncto triplici habere poſſunt, alioquin enim daretur recta Lineam quinti ordinis in ſex punctis ſecans. Nihil autem impedit quo minus Linea ſexti ordinis duo habeat puncta triplicia.

302. Si æquatio in hac forma contineatur: $P(x-p)^4+Q(x-p)^3(y-q)+R(x-p)^2(y-q)^2+S(x-p)(y-q)^3+T(y-q)^4=0$, tum Curva in $M$ habebit punctum quadruplex. Linea ergo curva ſimpliciſſima, quæ puncto quadruplici gaudeat, ad Linearum ordinem quintum pertinebit. Duo vero puncta quadruplicia non cadunt niſi in Lineas aut octavi aut altioris gradus. Simili modo æquationes generales exhiberi poſſunt pro Lineis, quæ in $M$ habeant punctum quintuplex, vel pro lubitu multiplex.

303. Quod, ſi autem $M$ fuerit vel punctum duplex vel triplex vel utcunque multiplex, tum vel totidem Curvæ rami ſe mutuo in puncto $M$ ſecabunt ſive tangent; vel, ſi numerus ramorum ſe interſecantium ſit minor, tum unum plurave puncta conjugata in eodem puncto $M$ concreſcent: qui Curvæ ſtatus cognoſcetur ex iis, quæ ante ſunt tradita. Scilicet, in Functionibus $P$, $Q$, $R$, $S$, &c., ubique loco $x$ & $y$ ſcribi debent $p$ & $q$, & $t$ & $u$ loco Factorum $x-p$ & $y-q$; tum enim prodibunt ejuſmodi æquationes, ex quibus conſtitutio Curvæ & ramorum ſe in $M$ interſecantium Tangentes definiri poterunt.

## CAPUT XIV.

### *De curvatura Linearum curvarum.*

304. **Q**UEMADMODUM in ſuperiori Capite lineas rectas indagavimus, quæ in quovis puncto Lineæ curvæ ipſius directionem indicabant, ita hic Lineas curvas ſimpliciores inveſtigabimus, quæ in quovis loco cum Curva propoſita tam exacte congruant, ut ſaltem per minimum ſpatium quaſi confundantur. Sic enim cognita indole Curvæ ſimplicioris, ſimul Curvæ propoſitæ natura inde colligetur. Simili methodo ſcilicet hic utemur, qua ſupra ad naturam ramorum in infinitum extenſorum ſcrutandam ſumus uſi; primo, videlicet inveſtigando Lineam rectam, quæ Curvam tangat, deinde vero Lineam curvam ſimpliciorem, quæ cum Curva propoſita multo magis conveniat, eamque non ſolum tangat, ſed quaſi oſculetur. Vocari autem ejuſmodi Linearum curvarum arctiſſimus contactus ſolet OSCULATIO.

TAB. XV. Fig. 55. 305. Sit igitur propoſita æquatio quæcunque inter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$, atque ad naturam minimæ Curvæ portionis $Mm$ circa punctum $M$ verſantis indagandam, cum inventa ſit Abſciſſa $AP = p$ & Applicata $PM = q$, ponatur in Axe $MR$ Abſciſſa minima $Mq = t$, & Applicata $qm = u$; eritque $x = p + t$, & $y = q + u$; quibus valoribus in æquatione ſubſtitutis, perveniatur ad hanc æquationem

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \&c.,$$

quæ exprimet naturam Curvæ ejuſdem ad Axem $MR$ relatæ. Quoniam autem has novas Coordinatas $t$ & $u$ minimas ſtatuimus, ſequentes termini quaſi infinities erunt minores quam antecedentes; ideoque præ his ſine errore rejici poterunt.

306. Niſi ergo ambo coëfficientes primi $A$ & $B$ evaneſcant,

Digitized by Google

rejectis ſequentibus terminis omnibus, æquatio $0 = At + Bu$ oſtendet Lineam rectam $M\mu$ quæ Curvam in puncto $M$ tanget, hocque loco cum Curva communem habet directionem. Erit ergo $Mq : q\mu = B : -A$; unde, ob cognitas quantitates $A$ & $B$, poſitio Tangentis $M\mu$ innoteſcit, quæ cum Curvam in puncto tantum $M$ contingat, videamus quantum Curva $Mm$ porro a recta $M\mu$ ſaltem per minimum ſpatium aberret. In hunc finem aſſumamus normalem $MN$ pro Axe, in quem ex $m$ Applicata orthogonalis $mr$ ducatur, ac vocetur $Mr = r$; $rm = s$; erit $t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ & $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$, & $r = \frac{-At - Bu}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$, & $s = \frac{Bt - Au}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$. Quare, cum ſit $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gttu + \&c.$, erit $r$ quantitas infinities minor, quam $t$ & $u$, ac propterea erit quoque $r$ quantitas infinities minor quam $s$; nam $s$ per $t$ & $u$, at $r$ per ipſarum $t$ & $u$ quadrata vel poteſtates ſuperiores determinatur.



307. Naturam ergo Curvæ $Mm$ multo propius cognoſcemus, ſi terminos quoque $Ct^2 + Dtu + Eu^2$ in computum ducamus, atque ſequentes tantum negligamus; ſicque habebimus inter $t$ & $u$ hanc æquationem $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$, in qua ſi loco $t$ & $u$ valores ſuperiores ſubſtituamus, habebimus $r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \frac{(A^2C + ABD + B^2E)rr}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2D - B^2D - 2ABC + 2ABE)rs}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2E - ABD + B^2C)ss}{A^2 + B^2}$. At, quia $r$ infinities minor eſt quam $s$, termini $rr$ & $rs$ præ termino $ss$ evaneſcent, fietque $ss = \frac{(A^2 + B^2)r\sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$, quæ æquatio exprimit naturam Curvæ Curvam propoſitam in $M$ oſculantis.

308. Curvæ ergo Arcus minimus $Mm$ congruet cum Vertice Parabolæ ſuper Axe $MN$ deſcriptæ, cujus Latus rectum

LIB. II. ſeu Parameter eſt $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$ : unde qualis eſt curvatura hujus Parabolæ in vertice talis erit Curvæ propoſitæ curvatura in puncto $M$. Cum autem nullius Curvæ curvatura diſtinctius cognoſcatur quam Circuli, quoniam ipſius curvatura ubique eſt eadem, eoque major exiſtit, quo minor fuerit radius; commodius erit curvaturam Curvarum definire per Circulum æqualis curvaturæ, qui *Circulus oſculator* vocari ſolet. Hanc ob rem oportebit Circulum definire cujus curvatura conveniat cum curvatura propoſitæ Parabolæ in ipſius Vertice, quo tum Circulum iſtum in locum Parabolæ oſculantis ſubſtituere liceat.

309. Ad hoc efficiendum, contemplemur curvaturam Circuli tanquam incognitam, eamque modo expoſito per curvaturam Parabolæ exprimamus, ſic enim viciſſim pro Parabola oſculante Circulus oſculator ſubſtitui poterit. Sit igitur Curva $Mm$ propoſita Circulus radio $= a$ deſcriptus, cujus natura exprimetur æquatione $yy = 2ax - xx$. Sumta ergo $AP = p$, & $PM = q$ erit, $qq = 2ap - pp$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$, atque orietur hæc æquatio $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at - pp - 2pt - tt$, quæ, ob $qq = 2ap - pp$, reducitur ad hanc formam $0 = 2at - 2pt - 2qu - tt - uu$, quæ cum ſuperiori forma comparata dat $A = 2a - 2p$; $B = -2q$; $C = -1$, $D = 0$, & $E = -1$, unde fit $AA + BB = 4(aa + 2ap + pp + qq) = 4aa$, & $(AA + BB)\sqrt{(AA + BB)} = 8a^3$ atque $AAE - ABD + BBC = -AA - BB = -4aa$. Unde Circulum, cujus radius $= a$, in quovis puncto oſculatur Parabolæ vertex, cujus natura exprimitur æquatione $ss = 2ar$; ideoque viciſſim quam Curvam oſculatur Vertex Parabolæ $ss = br$, eandem oſculabitur Circulus, cujus radius eſt $= \frac{1}{2}b$.

310. Cum igitur ſupra invenerimus Curvam $Mm$ oſculari Parabolam cujus æquatio ſit $ss = \frac{(AA + BB)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C} r$,

mani-

manifeſtum eſt ejuſdem Curvæ curvaturam in $M$ convenire cum curvatura Circuli, cujus radius ſit $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$. Hæc ergo expreſſio dat radium Circuli oſculatoris, atque iſte radius quoque vocari ſolet *Radius oſculi*; ſæpe etiam *radius curvedinis* ſeu *curvatura* appellatur. Ex æquatione ergo inter $t$ & $u$, quam ex æquatione inter $x$ & $y$ propoſita elicuimus, ſtatim definiri poteſt radius oſculi Curvæ in puncto $M$, ſeu radius Circuli oſculantis Curvam in $M$. In æquatione enim inter $t$ & $u$ rejiciantur termini, in quibus $t$ & $u$ plures duabus dimenſiones obtinent, atque ex æquatione, quæ erit hujus formæ

$$0 = At + Bu + Ctt + Dtu + Euu,$$

invenietur radius oſculi $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

311. Quoniam vero ſignum radicale $\sqrt{(A^2 + B^2)}$ ambiguitatem ſigni involvit, incertum eſt utrum iſta expreſſio ſit affirmativa an negativa, ſcilicet utrum concavitas Curvæ punctum $N$ reſpiciat, an convexitas. Ad hoc dubium tollendum quæri debet utrum Curvæ punctum $m$ intra Tangentem $M\mu$ verſus Axem $AN$ ſit poſitum, an vero extra Tangentem cadat. Priori caſu Curva verſus $N$ erit concava, atque Centrum Circuli oſculantis in rectæ $MN$ portionem verſus Axem protenſam incidet; poſteriori caſu vero in portionem rectæ $NM$ ultra $M$ productam. Omnis ergo dubitatio evaneſcet ſi inquiratur, utrum $qm$ ſit minor quam $q\mu$, an major; priori enim caſu Curva verſus $N$ erit concava, poſteriori vero convexa.

312. Eſt vero $q\mu = \frac{-At}{B}$, & $qm = u$, quare videndum eſt utrum ſit $\frac{-At}{B}$, major minorve quam $u$. Quia igitur $m\mu$ eſt Lineola quam minima, ponatur, $m\mu = w$ erit-

LIB. II. que $u = \frac{-At}{B} - w$; unde, facta ſubſtitutione, fit $o = -Bw + Ctt - \frac{ADtt}{B} - Dtw + \frac{A^2Ett}{BB} + \frac{2AEtw}{B} + Ew^2$; ubi, ob $w$ præ $t$ minimum, termini $tw$ & $w^2$ evaneſcunt. Hinc fit $w = \frac{(B^2C - ABD + A^2E)tt}{B^3}$. Quod ſi ergo $w$ fuerit quantitas affirmativa, quod evenit ſi $\frac{B^2C - ABD + A^2E}{B}$, ſeu $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ fuerit quantitas affirmativa, tum Curva erit concava verſus $N$; ſin autem $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ fuerit quantitas negativa, Curvæ convexitas punctum $N$ reſpiciet.

TAB. XV. Fig. 57. 313. Quo hæc clariora reddantur, diverſi caſus qui occurrere poſſunt, ſeorſim ſunt evolvendi. Sit igitur primum $B = o$, quo caſu ipſa Applicata $PM$ erit Tangens Curvæ $Mm$, & radius oſculi erit $= \frac{A}{2E}$. Utrum autem Curva ſit concava verſus $R$, uti Figura præſentat, an convexa, ex æquatione $o = At + Ctt + Dtu + Euu$ intelligitur. Cum enim ſit $Mq = t$ & $qm = u$, ob $t$ infinities minus quam $u$, termini $tt$ & $tu$ præ $uu$ evaneſcent, eritque $At + Euu = o$; ex qua æquatione intelligitur, ſi coefficientes $A$ & $E$ habeant contraria ſigna, ſeu ſi $\frac{E}{A}$ fuerit quantitas negativa, tum Curvam fore concavam verſus $R$. At, ſi coëfficientes $A$ & $E$ habeant paria ſigna, & $\frac{E}{A}$ fuerit quantitas affirmativa, tum Curva ad alteram Tangentis partem erit ſita; Abſciſſa enim $Mq$ ſtatui debet negativa quo Applicata $qm$ reſpondeat realis.

TAB. XV. Fig. 55. 314. Sit nunc Tangens $M\mu$ inclinata ad Axem $AP$ ſeu ipſi parallelam, ita ut angulus $RM\mu$ ſit acutus, & normalis $MN$ Axem in $N$ ultra $P$ ſecet: quo caſu Abſciſſis $t$ reſpondebunt Applicatæ $u$ affirmativæ; unde coëfficientes $A$ & $B$

ſigna habebunt diſparia, & fractio $\frac{A}{B}$ erit negativa.. De hoc CAP. XIV.
caſu jam ante vidimus Curvam fore concavam verſus $N$, ſi fuerit $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ quantitas affirmativa; vel, cum $\frac{B}{A}$ ſit quantitas negativa, ſi fuerit $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ quantitas negativa. Sin autem fuerit $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ quantitas negativa, ſeu $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ quantitas affirmativa, tum Curva verſus $N$ convexitatem obvertet. Utroque vero caſu radius oſculi erit $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

315. Sit nunc $A = 0$, quo caſu recta $MR$ Axi parallela TAB. XV. Fig. 58.
ſimul erit Curvæ Tangens, & $u$ infinities minor quam $t$; unde erit $0 = Bu + Ctt$. Quare, ſi $B$ & $C$ habeant æqualia ſigna, ſeu ſi $BC$ fuerit quantitas affirmativa, tum $u$ habere debet valorem negativum; ideoque Curva erit concava verſus punctum $P$, in quod $N$ incidit, quod ipſum regula ſuperior, facto $A = 0$, oſtendit; radius oſculi vero erit $= \frac{B}{2C}$. Hæc TAB. XV. Fig. 59.
autem eadem regula, quæ ſupra eſt data, valet, ſi Tangens $MT$ ultra $P$ cum Axe concurrat; tum enim pariter Curva verſus $N$ erit vel concava vel convexa, prout hæc expreſſio $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$, fuerit vel affirmativa vel negativa, eritque radius oſculi ut ante $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

316. Sit propoſita Ellipſis, ſeu ſaltem ejus quadrans $DMC$, TAB. XV. Fig. 60.
cujus Centrum $A$, alter ſemiaxis tranſverſus $AD = a$, alter ſemiaxis conjugatus $AC = b$. Sumtis ergo Abſciſſis $x$ in Axe $AD$ a Centro $A$, habebitur hæc æquatio pro Ellipſi $aayy + bbxx = aabb$. Sumta jam quapiam Abſciſſa $AP = p$, & poſita Applicata $PM = q$, erit $aaqq + bbpp = aabb$. Ponatur jam $x = p + t$, & $y = q + u$, erit $aaqq + 2aaqu +$



Digitized by Google

LIB. II. $aauu + bbpp + 2bbpt + bbtt = aabb$, ſeu $2bbpt + 2aaqu + bbtt + aauu = 0$. Primum ergo, ob coëfficientes ipſarum $t$ & $u$, normalis $MN$ citra $P$ cum Axe concurrit: eritque $PM : PN = B : A = aaq : bbp$ & $PN = \frac{bbp}{aa}$, ob $A = 2bbp$ & $B = aaq$. Præterea vero, ob $C = bb$, $D = 0$ & $E = aa$, erit $\frac{AAE - ABD + B^2C}{B} = \frac{4aabb(aaqq + bbpp)}{2aaq} = \frac{4a^4b^4}{2aaq}$; ideoque quantitas affirmativa, qua indicatur Curvam verſus $N$ eſſe concavam.

317. Ad ipſum jam radium oſculi inveniendum, eſt $A^2 + B^2 = 4(a^4qq + b^4pp)$, & $A^2E - ABD + B^2C = 4a^4b^4$; unde radius oſculi erit $= \frac{(a^4qq + b^4pp)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$. At eſt $MN = \sqrt{(qq + \frac{b^4pp}{a^4})}$, unde $\sqrt{(a^4qq + b^4pp)} = aa . MN$, ideoque radius oſculi $= \frac{a^2 . MN^3}{b^4}$. Si in normalem $MN$ productam ex Centro $A$ ducatur perpendiculum $AO$, erit, ob $AN = p - \frac{bbp}{aa}$ & triangula $MNP$ & $ANO$ ſimilia, $NO = \frac{aabbpp - b^4pp}{a^4 . MN}$ & $MO = NO + MN = \frac{aaqq + bbpp}{aa . MN} = \frac{bb}{MN}$; unde $MN = \frac{bb}{MO}$, hincque radius oſculi $= \frac{aabb}{MO^3}$, quæ expreſſio ad utrumque Axem $AD$ & $AC$ æque eſt accommodata.

318. Invento autem pro quovis Curvæ loco radio oſculi, natura Curvæ ſatis clare perſpicitur. Si enim portio Curvæ in partes plurimas quam minimas dividatur, unaquæque particula haberi poteſt pro Arculo Circuli, cujus radius erit ipſe radius oſculi in eo loco. Hinc vero etiam deſcriptio Curvæ per plurima puncta multo accuratius abſolvetur. Poſtquam

Digitized by Google

enim plura notata fuerint puncta, per quæ Curva tranſeat, ſi pro his ſingulis punctis primo quærantur Tangentes, hincque porro normales, atque tum radii oſculi, portiunculæ Curvæ intra puncta inventa ſitæ ope circini poterunt deſcribi. Hocque modo eo accuratius vera Curvæ figura exprimetur, quo propiora fuerint puncta primum notata. CAP. XIV.

319. Quoniam igitur portiuncula Curvæ ad $M$ cum Arculo Circuli radio oſculi deſcripti congruit, non ſolum elementum $Mm$, ſed etiam præcedens $Mn$ eadem curvatura erit præditum. Cum enim natura minimæ Curvæ portionis $Mm$ exprimatur hujuſmodi æquatione, $ss = \alpha r$ inter Coordinatas $Mr = r$ & $rm = s$, unicuique Abſciſſæ minimæ $Mr = r$, ex æquatione duplex reſpondebit Applicata $s$ altera affirmativa, altera negativa: ideoque Curva verſus $n$ æque ac verſus $m$ continuabitur. Ubicunque ergo radius oſculi, TAB. XV. *Fig.* 55.

qui eſt $= \frac{1}{2}\alpha$, finitam habet magnitudinem, ibi curvatura

utrinque ſaltem per minimum ſpatiolum erit uniformis. Neque ergo his caſibus Curva ex $M$ ſubito, formata Cuſpide, reflectetur, neque mutata curvatura, portio $Mn$ convexitatem verſus $N$ obvertere poterit, dum altera $Mm$ eſt concava verſus $N$; cujuſmodi curvaturæ immutatio vocari ſolet INFLEXIO, vel *punctum* FLEXUS CONTRARII: Quare, ubi radius oſculi eſt finitus, ibi neque Cuſpis, neque punctum flexus contrarii locum habere poteſt.

320. Cum igitur ex æquatione inter $t$ & $u$

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Euu + Ft^3 + Gttu + Htu^2 + \&c.,$$

inventus ſit radius oſculi $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$, manifeſtum eſt, ſi fuerit $A^2E - ABD + B^2C = 0$, tum radium oſculi fieri infinite magnum, ideoque Circulum oſculantem in Lineam rectam abire. Ubi ergo hoc evenit, ibi Linea curva curvatura deſtituitur, atque duo Curvæ elementa quaſi in

Lib. II. directum erunt ſita. Quo igitur his caſibus natura Curvæ penitius perſpiciatur, ſubſtitutio $t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(AA+BB)}}$ & $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(AA+BB)}}$, etiam in terminis $Ft^3 + Gttu + Htuu + Iu^3$ eſt inſtituenda. Cum autem præ termino primo $r\sqrt{(A^2+B^2)}$ omnes termini ſequentes, qui $r$ continent, evaneſcant, his terminis rejectis, atque ſubſtitutione per totam æquationem facta, obtinebitur ejuſmodi æquatio

$$r\sqrt{(A^2+B^2)} = \alpha ss + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

321. Ex hac æquatione jam ſtatim colligitur, ut ſupra, radius oſculi $= \frac{\sqrt{(AA+BB)}}{2\alpha}$; ſin autem ſit $\alpha = 0$, quo caſu radius oſculi fit infinitus, ad Curvæ naturam exactius cognoſcendam, ſumi debet terminus ſequens $\beta s^3$, ita ut ſit $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \beta s^3$ niſi enim ſit $\beta = 0$, termini ſequentes $\gamma s^4$, $\delta s^5$ &c., omnes præ hoc evaneſcunt. Curvam ergo hoc caſu in $M$ oſculabitur Curva hac æquatione $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \beta s^3$ expreſſa, ex qua ſimul figura Curvæ circa punctum
Tab. XVI. Fig. 61. $M$ cognoſcetur. Cum igitur Abſciſſæ $r$ negative ſumtæ negativus valor Applicatæ $s$ reſpondeat, Curva circa $M$ figuram habebit anguineam $mM\mu$, ideoque in $M$ habebit punctum flexus contrarii.

322. Quod, ſi præter $\alpha$ etiam fiat $\beta = 0$, tum natura Curvæ circa $M$ exprimetur hac æquatione $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \gamma s^4$, ex qua cum unicuique Abſciſſæ $r$ duplex Applicata $s$
Tab. XVI. Fig. 62. reſpondeat, altera affirmativa, altera negativa, neque Abſciſſa $r$ utrinque ſumi queat, utraque Curvæ portio $Mm$ & $M\mu$ ad eandem Tangentis partem erit poſita. At ſi, ob $\alpha$, $\beta$, & $\gamma$ evaneſcentes, natura Curvæ circa $M$ exprimatur æquatione $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \delta s^5$, tum Curva ad $M$ iterum ha-
Tab. XVI. bebit punctum flexus contrarii uti in *Figura* 61. Sin autem fuerit etiam $\delta = 0$, ut fiat $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \varepsilon s^6$, tum Curva

Digitized by Google

iterum puncto flexus contrarii deſtituetur, uti *Figura* 62. Atque generaliter, ſi exponens ipſius $s$ fuerit numerus impar, Curva in $M$ habebit punctum flexus contrarii; ſin autem exponens ipſius $s$ fuerit numerus par, Curva carebit puncto flexus contrarii, uti *Figura* 62. CAP. XIV. TAB. XVI.

323. Hæc igitur ſunt Curvarum phænomena, ſi punctum $M$ fuerit ſimplex, ſeu ſi in æquatione

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \&c.,$$

non uterque coëfficiens $A$ & $B$ ſimul evaneſcat. Quod ſi autem fuerit & $A = 0$, & $B = 0$, Curvaque habuerit duos pluresve ramos ſe in puncto $M$ interſecantes, uniuſcujuſque rami curvatura & indoles in $M$ inveſtigabitur ſeorſim, ut ante. TAB. XV. *Fig.* 56.
Sit enim pro Tangente cujuſvis rami $mt + nu = 0$, & quæratur æquatio pro hoc ramo inter Coordinatas $r$ & $s$, quarum illa $r$ in normali $MN$ capiatur, ut ſit $r$ infinities minor quam $s$. Poni ergo debebit $t = \frac{-mr+ns}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$ & $u = \frac{-ms-nr}{\sqrt{(m^2+n)}}$; TAB. XV. *Fig.* 55.
que facto & neglectis terminis ob infinitam parvitatem præ reliquis evaneſcentibus, prodibit, ſi $M$ fuerit punctum duplex, hujuſmodi æquatio $rs = \alpha s^3 + \beta s^4 + \gamma s^5 + \delta s^6 +$ &c.: ſin autem $M$ fuerit punctum triplex, talis $rss = \alpha s^4 + \beta s^5 + \gamma s^6 +$ &c., & ita porro: quæ æquationes omnes reducuntur ad hanc formam

$$r = \alpha ss + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

324. Ex hac æquatione intelligitur iſtius Curvæ rami, quem conſideramus, in $M$ eſſe radium oſculi $= \frac{1}{2\alpha}$, qui, ſi $\alpha = 0$, fiet $= \infty$. Hoc ergo caſu natura Curvæ exprimetur vel hac æquatione $r = \beta s^3$, vel $r = \gamma s^4$ vel $r = \delta s^5$, &c.; ex quibus, ut ante, colligetur Curvæ ramum in $M$ vel punctum flexus contrarii habere, vel tali carere. Prius ſcilicet evenit, ſi exponens ipſius $s$ fuerit numerus impar, poſterius ſi ſit numerus

LIB. II. par. Hoc ergo modo judicandum erit de quovis ramo per punctum $M$ tranſeunte ſeorſim, cum reperta fuerit ejus Tangens, ejuſque Tengens diſcrepet a Tangentibus reliquorum ramorum ſeſe in eodem puncto $M$ interſecantium.

325. Aliud autem judicium erit ferendum, ſi duorum pluriumve ramorum Tangentes in puncto $M$ coincidant. Sint enim, evaneſcentibus $A$ & $B$ in æquatione $0 = Ctt + Dtu + Euu + Ft^3 + Gt^2u +$ &c., primi membri $Ctt + Dtu + Euu$, ambo Factores ſimplices æquales, ſeu ambo rami ſe in puncto

TAB. XV. Fig. 55. $M$ decuſſantes communem habeant Tangentem. Sit ergo $Ctt + Dtu + Euu = (mt + nu)^2$, atque æquatione ad Coordinatas $Mr = r$, & $rm = s$ tranſlata, ponendo $t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$ & $u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$; hujuſmodi prodibit æquatio $rr = \alpha rss + \beta s^3 + \gamma rs^3 + \delta s^4 + \varepsilon rs^4 + \zeta s^5 +$ &c: termini enim, in quibus $r$ habet duas pluresve dimenſiones præ primo $rr$ evaneſcunt.

326. Hic primum ſpectandus eſt terminus $\beta s^3$, qui ſi adfuerit, præ eo reliqui omnes evaneſcunt, propterea quod $r$ infinities minus eſt quam $s$. Niſi ergo fuerit $\beta = 0$, natura Curvæ circa $M$ exprimetur hac æquatione $rr = \beta s^3$; ex qua, cum ſit $r = s\sqrt{\beta s} = ss\sqrt{\frac{\beta}{s}}$, intelligitur radium oſculi in $M$ eſſe $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\beta}}$; ſeu, ob $s$ evaneſcens in $M$, radium oſculi quoque fieri $= 0$. Erit ergo curvatura in $M$ infinite magna ſeu Elementum Curvæ in $M$ erit portio Circuli infi-

TAB. XVI. Fig. 63. nite parvi. Quoniam porro Applicata $s$ eundem obtinet valorem, ſive Abſciſſa $r$ ſumatur affirmativa ſive negativa, patet Curvam in $M$ habere Cuſpidem, atque in duos ramos $Mm$, $M\mu$ divaricari ſe mutuo in $M$ contingentes atque Tangenti $Mt$ convexitatem obvertentes.

327. Sit $\beta = 0$; adſit autem terminus $\delta s^4$, præ quo $\gamma rs^3$ evaneſcit, atque natura Curvæ circa $M$ exprimetur æquatione $rr = \alpha rss + \delta s^4$; quæ, ſi fuerit $\alpha\alpha$ minor quam $-4\delta$, ob Factores

Digitized by Google

toreſ imaginarios, punctum conjugatum in $M$ indicat; ſin autem $\alpha\alpha$ major quam $-4\delta$, tum in duas æquationes hujuſmodi $r = fss$ & $r = gss$ diſpeſcitur. Quare in $M$ duo Curvæ rami ſe mutuo contingent, quorum alterius in $M$ radius oſculi eſt $= \frac{1}{2f}$, alterius $= \frac{1}{2g}$. Si ergo hi duo rami concavitatem in eandem plagam vertant, figura erit duorum Arcuum circularium ſe intus Tangentium; ſin autem concavitates in plagas oppoſitas dirigantur, figura erit duorum Arcuum circularium ſe extus Tangentium.

CAP. XIV.

TAB. XVI. *Fig.* 64. *Fig.* 65.

328. Sin etiam $\delta$ evaneſcat, tum æquatio vel in duas æquationes erit reſolubilis, vel ſecus, priori caſu duo oriuntur rami ſe in puncto $M$ tangentes, quorum utriuſque natura exprimetur hujuſmodi æquatione $r = \alpha s^m$; prodibunt ergo tot diverſæ figuræ, quot dantur combinationes binorum ramorum, qui in $M$ punctum ſimplex conſtituunt, quos vocemus *ramos primi ordinis*, qui omnes in æquatione $r = \alpha s^m$, continentur. Poſteriori autem caſu quo æquatio in duas alias ſe reſolvi non patitur, natura Curvæ exprimetur æquatione vel $rr = \alpha s^5$, vel $rr = \alpha s^7$, vel $rr = \alpha s^9$, &c.; quos ramos cum eo, quem ſupra invenimus $rr = \alpha s^3$, *ramos ſecundi ordinis* appellabimus, quia vicem tenent duorum ramorum primi ordinis ſe in $M$ tangentium. Hi autem rami ſecundi ordinis omnes in $M$ habebunt Cuſpidem, uti præbuit æquatio $rr = \alpha s^3$; hoc tamen diſcrimine, quod, cum radius oſculi in $M$ pro æquatione $rr = \alpha s^3$ eſſet infinite parvus, idem pro reliquis æquationibus prodeat infinite magnus. Cum enim ex æquatione $rr = \alpha s^5$ ſit $r = ss\sqrt{\alpha s}$, erit radius oſculi in $M = \frac{1}{2\sqrt{\alpha s}}$, hoc eſt, ob $s = 0$, infinitus.

TAB. XVI. *Fig.* 63.

329. Si tres Tangentes ramorum ſe in $M$ decuſſantium in ſe invicem incidant; tum vel tres rami primi ordinis ſe in eodem puncto $M$ contingent, vel in $M$ erit contactus unius



Digitized by Google

rami ſecundi ordinis cum uno ramo primi ordinis, vel unicus per $M$ tranſibit *ramus tertii ordinis.* Ramorum autem tertii ordinis natura exprimetur hujuſmodi æquationibus $r^3 = \alpha s^4$; $r^3 = \alpha s^5$; $r^3 = \alpha s^7$; $r^3 = \alpha s^8$; &c., ſeu hac generali $r^3 = \alpha s^n$, exiſtente $n$ numero quocunque integro ternario majore neque per ternarium diviſibili. Horum ramorum autem figura ita erit comparata, ut in $M$ ſit punctum flexus contrarii, ſi $n$ fuerit numerus impar; flexus vero non contrarius ſeu Tab. XVI. continuus (ut in *Figura* 62.) adſit, ſi $n$ fuerit numerus par. Ceterum in his Curvis radius oſculi in $M$ erit infinite parvus ſi $n$ minor quam 6, at infinite magnus ſit $n$ major quam 6.

330. Simili modo ſi quatuor Tangentes ramorum ſe in $M$ decuſſantium congruant, tum vel quatuor rami primi ordinis, vel duo primi & unus ſecundi, vel duo rami ſecundi ordinis, vel unus primi & unus tertii ordinis ſe in eodem puncto $M$ contingent, vel denique unicus *ramus quarti ordinis* per $M$ tranſibit. Ramorum autem quarti ordinis natura continetur hac æquatione generali $r^4 = \alpha s^n$, exiſtente $n$ numero integro Tab. XVI. Fig. 63. impari majore quam 4. Hæ autem æquationes omnes præbent Cuſpidem, uti rami ſecundi ordinis. At in $M$ erit radius oſculi infinite parvus ſi $n$ minor quam 8, infinite magnus autem ſi $n$ major quam 8.

331. Eodem modo ramorum *quinti* ſuperiorumve ordinum natura evolvetur; ratione figuræ autem rami quinti, ſeptimi, noni, omniumque imparium ordinum conveniunt cum ramis primi ordinis, quorum duplex eſt figura, vel cum puncto flexus contrarii, vel ſine eo. Rami autem ſexti, octavi, & omnium parium ordinum conveniunt ratione figuræ cum ramis ſecundi & quarti ordinis, omnes ſcilicet habebunt Cuſpidem in $M$ uti *Figura* 63. exhibet. Quod autem ad radium oſculi attinet, quoniam horum Arcuum natura exprimitur hac æquatione $r^m = \alpha s^n$, exiſtente $n$ numero majore quam $m$; per-

Digitized by Google

ſpicuum eſt, ſi fuerit $n$ minor quam $2m$, radium oſculi fore infinite parvum; contra vero, ſi $n$ major quam $2m$, infinite magnum. CAP. XIV.

332. Phænomena ergo, quæ in omni Curva conſpectui ſe offerunt, ad tria genera reducuntur. Primo ſcilicet Curva *continua curvatura* progreditur, neque uſquam punctum flexus contrarii habet, neque Cuſpidem ſeu punctum reflexionis. Evenit hoc primum ſi radius oſculi ubique fuerit finitæ magnitudinis, tum vero etiam dantur caſus quibus radii oſculi magnitudo ſive infinite magna ſive infinite parva continuum tractum non perturbat, quod uſu venit ſi natura Curvæ circa punctum $M$ exprimitur æquatione $\alpha r^m = s^n$, exiſtente $m$ numero impari, at $n$ numero pari majori quam $m$. Secundum phænomenon eſt *punctum Flexus contrarii*, quod locum habere nequit niſi radius oſculi fuerit vel infinite magnus vel infinite parvus; indicatur autem æquatione $\alpha r^m = s^n$, ſi uterque exponens $m$ & $n$ fuerit numerus impar, exiſtente ſemper $n$ majore quam $m$. Erit enim radius oſculi infinite magnus ſi $n$ major quam $2m$, at infinite parvus ſi $n$ minor quam $2m$. Tertium phænomenon eſt *punctum Reflexionis* ſeu *Cuſpis*, ubi duo quaſi rami verſus ſe invicem convexi in puncto coeuntes ſe tangunt atque terminantur; tale punctum monſtrat æquatio $\alpha r^m = s^n$, ſi $m$ fuerit nnmerus par & $n$ impar. In Cuſpide ergo radius oſculi ſemper eſt vel infinite parvus vel infinite magnus.

333. Quoniam igitur in his tribus generibus omnes Curvarum, ratione tractus continui, varietates continentur, primum intelligitur Curvæ continuæ ramum nunquam ita inflexum dari, ut in $C$ angulum finitum $ACB$ conſtituat. Deinde, cum in puncto reflexionis ambo rami ſibi convexitatem obvertant, ejuſmodi punctum reflexionis $ACB$ in $C$ non datur, ubi rami $AC$ & $BC$ in $C$ quidem communem Tangentem habeant, at alterius concavitas alterius convexitatem reſpiciat; & quoties TAB. XVI. *Fig.* 66. TAB. XVI. *Fig.* 67.

LIB. II. hujuſmodi reflexio adeſſe videatur, toties Curva non eſt completa; &, ſi Curva ad normam æquationis compleatur ac ſecundum omnes partes exprimatur, orietur figura, qualis in

TAB. XVI. *Figura* 64 exhibetur. Dantur quidem Curvarum deſcribendarum modi, quibus ejuſmodi Cuſpis $ACB$ orietur, quæ propterea ab HOSPITALIO *Cuſpis ſecundæ ſpeciei* vocatur. Verum notandum eſt deſcriptiones mechanicas non ſemper totam Curvam, quæ quidem æquatione contineatur, producere, ſed ſæpenumero certam tantum partem exhibere, qua ſola notatione lis, quæ circa hanc Cuſpidem ſecundæ ſpeciei eſt mota, dirimitur.

Non obſtantibus his argumentis, quibus exiſtentia hujuſmodi Cuſpidis ſecundæ ſpeciei everti videtur, innumerabiles dantur Curvæ algebricæ tali Cuſpide præditæ. Inter quas adeo una ex ordine Linearum quarto, hac æquatione contenta $y^4 - 2y^2x - 4yxx - x^3 = 0$, quæ ex iſta formula $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ reſultat. Quanquam enim hic primum occurrit terminus $\sqrt{x}$, tamen ejus ſignum non eſt ambiguum, ſed neceſſario debet eſſe $+$. Nam, ſi ipſi tribueretur ſignum negationis, alter terminus $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{(x\sqrt{x})}$ evaderet imaginarius. Ex quo exemplo quemadmodum exempla ſupra allata reſtringi oporteat luculenter perſpicitur.

TAB. XVI. Fig. 64. 334. Si duo rami, qui in $M$ communem habent Tangentem, ideoque quatuor Arcus ex $M$ exeuntes repræſentant nempe $Mm$, $M\mu$, $Mn$, $M\nu$, diverſis æquationibus exprimantur, dubium eſt nullum, quinam horum Arcuum ſint continui; ii ſcilicet, qui ſub eadem æquatione continentur; eritque Arcus $Mm$ continuatio Arcus $Mn$, & $M\mu$, continuatio Arcus $\nu M$. Quod ſi vero ambo rami illi eadem æquatione exprimantur, tum ob ceſſantem rationem priorem, Arcus $Mm$ æque haberi poteſt pro continuatione Arcus $\nu M$, atque Arcus $nM$. Cum autem uterque Arcus $Mn$ & $M\nu$ æque haberi poſſit pro continuatione Arcus $Mm$, etiam alter pro alterius continuatione haberi poterit. Hinc Arcus $mM$,

Digitized by Google

& $M\mu$ Curvam continuam conſtituere cenſendi ſunt, æque ac bini Arcus quicunque alii, ſicque hoc caſu in $M$ ſe reſpicient duæ Cuſpides ſecundæ ſpeciei, $mM\mu$ & $nN\nu$. 

335. Neque vero ſolum valet de duobus ramis qui ſine Flexu contrario ac ſine Cuſpide ſe mutuo in $M$ tangunt atque eadem æquatione exprimuntur, ſed etiam eadem erit continuitatis ratio, cujuſcunque generis fuerint ambo illi rami ſe mutuo in $M$ tangentes, dummodo communi æquatione exprimantur. Evenit hoc quoties inter $r$ & $s$ ad hujuſmodi pervenitur æquationem $\alpha^2 r^{2m} - 2\alpha\mathsf{G} r^m s^n + \mathsf{G}\mathsf{G} s^{2n} = 0$; tum enim uterque ramus eadem æquatione $\alpha r^m = \mathsf{G} s^n$ exprimetur. Hoc igitur caſu quatuor Arcuum ex puncto $M$ exeuntium duoquicunque pro una Linea continua haberi poſſunt, hincque naſcentur innumerabiles Cuſpides ſecundæ ſpeciei. Hæc autem ipſa continuitatis ratio in cauſa eſt, quod quædam deſcriptiones ac conſtructiones mechanicæ nonnunquam Cuſpides ſecundæ ſpeciei producant; hoc tamen evenire non poteſt, niſi quando deſcriptio non totam Curvam in æquatione contentam, ſed ejus tantum ramum unum vel aliquot exhibet.

---

## CAPUT XV.

### *De Curvis una pluribuſve Diametris præditis.*

336. De Lineis ſecundi ordinis ſupra vidimus, eas omnes unam ad minimum habere Diametrum orthogonalem, quæ totam Curvam in duas partes ſimiles & æquales ſecet. Parabola ſcilicet ejuſmodi unam habet Diametrum; ac propterea duabus conſtat partibus æqualibus & ſimilibus. Ellipſis autem atque Hyperbola duas ejuſmodi habent Diametro ſe mutuo in Centro normaliter decuſſantes; ideoque in iis quatuor dantur Arcus ſeu rami inter ſe æquales & ſimiles.

 Circulus vero, quia ab omni recta per Centrum ducta in duas partes ſimiles & æquales dividitur, innumeras habebit partes æquales, omnes ſcilicet Arcus, qui æqualibus chordis ſubtenduntur, ſimul inter ſe ſunt æquales & ſimiles.

337. Hanc igitur duarum pluriumve partium ejuſdem Curvæ ſimilitudinem hic data opera perpendemus; eaſque Curvas, quarum duæ pluresve partes inter ſe ſunt ſimiles, ad æquationes generales revocabimus. Ac primo quidem, ſi conſideremus æquationem inter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$, diviſo univerſo ſpatio in quatuor regiones litteris Q, R, S, T indicatas per rectas $AB$, $EF$, ſe mutuo in $C$ normaliter ſecantes, ſumtis $x$ & $y$ affirmativis, portio Curvæ in regione Q ſita oritur; ſumta autem Abſciſſa $x$ affirmativa, at Applicata $y$ negativa, portio Curvæ in regione R ſita oritur: ſin autem $x$ negativa ponatur, manente $y$ affirmativa, portio Curvæ in regione S ſita prodibit; portio denique in regione T ſita evenitur, poſita utraque Coordinata $y$ & $x$ negativa.

Tab. XVII. Fig. 68.

338. Portiones ergo in regionibus Q & R ſitæ inter ſe erunt æquales & ſimiles, ſi æquatio ita fuerit comparata, ut non mutetur etiamſi $-y$ loco $y$ ſcribatur. Cum igitur omnis poteſtas parium exponentium ipſius $y$ hac gaudeat proprietate; patet, ſi in æquatione pro Curva nullæ poteſtates impares ipſius $y$ occurrant, Curvæ portiones in regionibus Q & R ſitas inter ſe fore æquales & ſimiles; ideoque rectam $AB$ in qua Abſciſſæ $CP = x$ capiuntur, fore Curvæ Diametrum. Hujuſmodi ergo Curvæ, ſi quidem fuerint algebraïcæ, omnes in hac æquatione generali continebuntur

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta yy + \varepsilon x^3 + \zeta xyy + \eta x^4 + \theta x^2 y^2 + \iota y^4 \text{ \&c.}$$

quæ expreſſio ita deſcribi poteſt ut ſit Functio rationalis ipſarum $x$ & $yy$. Quod ſi ergo $Z$ fuerit Functio quæcunque rationalis ipſarum $x$ & $yy$, tum æquatio $Z = 0$, exprimet Lineam curvam, quæ a recta $AB$ in duas partes ſimiles &

Digitized by Google

æquales biſecabitur ;. erunt ergo quoque portiones in regionibus S & T ſitæ inter ſe æquales & ſimiles. 

339. Portiones vero in regionibus Q & S erunt æquales & ſimiles, ſi æquatio ita fuerit comparata, ut poſito $-x$ loco $x$ non immutetur : quare, ſi Z fuerit Functio quæcunque rationalis ipſarum $xx$ & $y$, tum æquatio $Z = 0$, exprimet Curvam, quæ per rectam $EF$ in duas partes ſimiles & æquales biſecabitur. Æquatio ergo pro his Curvis erit hujuſmodi

$$0 = \alpha + \beta y + \gamma xx + \delta yy + \epsilon xxy + \zeta y^3 + \eta x^4 + \theta xxyy + \iota y^4 + \&c.$$

Per hanc ergo æquationem portio Curvæ in S ſita ſimilis & æqualis erit portioni in Q, ſimilique modo portio in T portioni in R.

340. Portiones autem in regionibus oppoſitis Q & T, ſeu R & S erunt ſimiles & æquales, ſi æquatio inter Coordinatas $x$ & $y$ ita fuerit comparata, ut, poſita utraque $x$ & $y$ negativa, nullam mutationem ſubeat. Sit $Z = 0$ æquatio pro his Curvis, ac primo patet, ſi Z fuerit Functio ipſarum $x$ & $y$, parium dimenſionum, ſeu, ſi fuerit aggregatum ex quotcunque Functionibus homogeneis parium dimenſionum, tum æquationem $Z = 0$ præſcripta gaudere proprietate. Tum vero ſi Z fuerit aggregatum quotcunque Functionum homogenearum imparium dimenſionum, ſumtis $x$ & $y$ negativis, Z abibit in $-Z$; ideoque, cum eſſet $Z = 0$, erit quoque $-Z = 0$. Hinc ergo duplex naſcitur æquatio generalis pro Curvis, quæ in regionibus oppoſitis Q & T itemque in R & S portiones habent æquales & ſimiles, altera ſcilicet erit

$$0 = \alpha + \beta xx + \gamma xy + \delta y^2 + \epsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta xxyy + \theta xy^3 + \iota y^4 + \kappa x^6 + \&c.$$

altera vero erit

$$0 = \alpha x + \beta y + \gamma x^3 + \delta x^2 y + \epsilon xy^2 + \zeta y^3 + \eta x^5 + \theta x^4 y + \iota x^3 y^2 + \&c.$$

341. Curvæ ergo, quæ duas habent partes ſimiles & æquales, duplicis ſunt generis : vel enim hæ duæ partes utrinque circa Lineam rectam ita ſunt diſpoſitæ, ut omnes Ordinatæ

orthogonales ad illam rectam ſimul bifariam ſecentur, quo caſu illa recta *Diameter* Curvæ *orthogonalis* appellatur, quorſum pertinent æquationes §. §. & 337. & 338. traditæ. Vel binæ illæ partes ſimiles & æquales in regiones oppoſitas Q & R ſeu T & S cadunt, ita ut omnis recta per punctum $C$ ducta Curvam dividat in duas partes alternatim æquales, cujuſmodi Curvæ continentur in æquationibus in paragrapho præcedente exhibitis. Hanc igitur partium æqualium diverſam poſitionem ita deſcribemus, ut eas, quæ ad priorem ſpeciem pertinent, *diametraliter æquales*; quæ vero ad poſteriorem, *alternatim æquales* appellemus. Quia vero in poſteriore ſpecie datur punctum $C$, per quod omnis recta utrinque ad Curvam producta ſimul biſecatur, hoc punctum *Centri* nomine appellari convenit, ita ut Curvæ binas partes alternatim æquales habentes Centro præditæ dicantur; illæ vero Curvæ, quæ duas partes diametraliter æquales habent, Dimetro præditæ vocentur.

342. Cum æquatio $Z = 0$, præbeat Curvas quarum Diameter eſt recta $AB$, ſi Coordinata $y$ pares tantum obtineat dimenſiones in Functiones $Z$, atque eadem æquatio $Z = 0$, rectam $EF$ Curvæ diametrum indicet, ſi altera Coordinata $x$ ubique pares habeat exponentes, ſequitur, ſi $Z$ ejuſmodi fuerit Functio ipſarum $x$ & $y$ ut omnes exponentes tam ipſius $x$ quam ipſius $y$ ſint numeri pares, tum utramque rectam $AB$ & $EF$ fore Curvæ Diametrum orthogonalem; ideoque quatuor partes in regionibus Q, R, S & T ſitas inter ſe fore æquales & ſimiles. Hujuſmodi ergo Curvæ omnes in hac generali æquatione continebuntur.

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta x^4 + \epsilon x^2 y^2 + \zeta y^4 + \eta x^6 + \theta x^4 y^2 + \&c.$$

343. Curvæ ergo in hac æquatione contentæ duas habebunt Diametros orthogonales $AB$ & $EF$ ſe mutuo in $C$ normaliter interſecantes. Pertinent ergo hæc Curvæ omnes ad Linearum ordines vel ſecundum, vel quartum, vel ſextum, &c., ita ut in nullo Linearum ordine impari ulla contineatur Linea curva duabus Diametris ſe mutuo normaliter interſecantibus prædita.

prædita. Deinde, quia iſta æquatio quoque continetur in æquatione priori, §. 339, hæ Curvæ ſimul Centrum habebunt in puncto $C$, ita ut omnis recta per id utrinque ad Curvam producta, in eo ſimul bifariam ſecetur. Hujuſmodi igitur Curvas duplici diametro gaudentes præbebit æquatio $Z = 0$, ſi quidem fuerit $Z$ Functio quæcunque rationalis ipſarum $xx$ & $yy$. CAP. XV.

344. Quia igitur hoc modo deducti ſumus ad Lineas curvas duabus Diametris præditas, inquiramus in æquationes pro Lineis curvis, quæ plures habeant Diametros. Ac primo quidem facile oſtendetur, ſi quæpiam Curva duas tantum habeat Diametros, eas inter ſe normales eſſe oportere, ita ut nulla Curva duabus Diametris tantum prædita detur, quæ non in æquatione modo inventa contineatur. Ponamus enim cujuſpiam Lineæ curvæ duas eſſe Diametros $AB$, & $EF$ ſeſe in $C$ non normaliter decuſſantes. Cum igitur $EC$ ſit Diameter, Curva utrinque circa eam æqualiter erit comparata: quare, cum ejus pars citerior rectam $AC$ pro Diametro habeat, etiam pars ulterior Diametrum habebit $GC$, in eodem puncto $C$ cum $EC$ angulum $GCE = ACE$ conſtituentem. Simili modo, cum $GC$ ſit Diameter, debebit quoque recta $IC$, exiſtente $GCI = GCE$, eſſe Diameter ejuſdem indolis, cujus eſt $EC$. Porro Diameter quoque erit recta $LC$, ſumto angulo $ICL = ICG$; ſicque progrediendo, continuo novæ Diametri reperientur donec in primam $AC$ recidant; quod evenit, ſi angulus $ACE$ ad angulum rectum habeat rationem rationalem. TAB. XVII. *Fig. 69.*

345. Niſi ergo angulus $ACE$ ad angulum rectum habeat rationem rationalem, numerus Diametrorum erit infinitus, quo caſu Curva erit Circulus; quippe in quo omnis recta per Centrum ducta eſt Diameter orthogonalis: hic enim Diametri nomen ad ſolas Diametros orthogonales reſtringimus, quia his ſolis Curvæ in duas partes ſimiles & æquales dividuntur. Ex his intelligitur nullam Curvam algebraicam duas habere poſſe Diametros inter ſe parallelas: ob rationes enim allegatas, ſi duas haberent Diametros parallelas, ſimul infinitas inter

 ſe parallelas & æqualiter diſtantes habere deberent; ideoque Linea recta hujuſmodi Curvam in infinitis punctis ſecare poſſet; quæ proprietas in Lineas curvas algebraicas non cadit.

346. Quod ſi ergo quæpiam Linea curva plures habeat Diametros, eæ omnes ſe mutuo in eodem puncto $C$ interſecabunt, atque a ſe invicem ſub æqualibus angulis diſtabunt. Erunt vero hæ Diametri duplicis generis alternatim progredientes; Diameter enim $CG$ ejuſdem erit indolis, cujus eſt Diameter $CA$; atque æquatio pro Curva, ſumta Diametro $CG$ pro Axe: conveniet cum æquatione pro Curva, ſumta Diametro $CA$ pro Axe: Diametri ergo alternæ $CA$, $CG$, $GL$ &c. æqualiter ad Curvam erunt affectæ, ſimilique modo Diametri $CE$, $CI$ &c. eadem ratione ad Curvam pertinebunt. Quam ob rem, ſi numerus Diametrorum fuerit finitus, tum angulus $ACG$ erit pars aliquota quatuor rectorum, ſeu angulus $ACE$ erit pars aliquota anguli 180 graduum, ſeu ſemiperipheriæ, quam vocemus $= \pi$.

TAB. XVII. *Fig.* 70. 347. Si fuerit angulus $ACE = 90° = \frac{1}{2}\pi$, caſus exiſtit jam ſupra tractatus, quo Curva duas habet Diametros inter ſe normales. Hujuſmodi ergo Curvas denuo inveſtigemus, at methodo diverſa a priori, quæ æque ad inventionem plurium Diametrorum accommodari queat. Sit igitur Curva duabus Diametris $AB$, & $EF$ prædita; ſumatur in ea quodcunque punctum $M$, &, ducta ex Centro $C$ recta $CM$, ponatur $CM = z$, & angulus $ACM = s$; quæraturque æquatio inter $z$ & $s$. Ac primo quidem intelligitur, quia recta $AC$ eſt Diameter, $z$ eſſe debere ejuſmodi Functionem ipſius $s$, quæ maneat eadem, etiamſi $-s$ loco $s$ ponatur; ſumto enim angulo $ACM = s$ negativo $ACm$, recta $Cm$ debet eſſe $= CM$. Verum *coſ.* $s$ eſt ejuſmodi Functio ipſius $s$, quæ manet eadem poſito $-s$ loco $+s$, quam ob rem huic requiſito ſatisfiet ſi fuerit $z$ Functio quæcunque rationalis ipſius *coſ.* $s$.

348. Ponatur Abſciſſa $CP = x$, Applicata $PM = y$,

erit $z = \sqrt{(xx+yy)}$ & $cof.\, s = \frac{x}{z}$; ſitque $Z = o$, æquatio pro Curva, cujus recta *CA* ſit Diameter; atque eſſe debebit Z Functio rationalis ipſarum $z$ & $\frac{x}{z}$, vel ipſarum $z$ & $x$, vel, ob rationalitatem, ipſarum $xx+yy$ & $x$. At ſi Z fuerit Functio ipſarum $xx+yy$ & $x$, erit quoque Functio ipſarum $yy$ & $x$. Sit enim $xx+yy=u$; quia Z debet eſſe Functio ipſarum $x$ & $u$, poſito $u=t+xx$, ut ſit $t=yy$, fiet Z Functio ipſarum $t$ & $x$, hoc eſt ipſarum $yy$ & $x$. Quoties ergo Z fuerit Functio rationalis ipſarum $yy$ & $x$, toties recta *CA* Curvæ erit Diameter: quæ eſt eadem proprietas Curvarum una Diametro gaudentium, quam ſupra invenimus.

349. At Curvam quæſitam duabus Diametris *AB* & *EF* præditam eſſe oportet; unde *CB* erit Diameter ejuſdem indolis, ac *CA*. Quare, ſi recta $CM=z$, ad Diametrum *CB* referatur, ob angulum $BCM = \pi - s$, neceſſe eſt ut $z$ ejuſmodi ſit Functio ipſius $s$, quæ non varietur, etiamſi loco $s$ ponatur $\pi - s$. Hujuſmodi Functio quidem foret $ſin.\, s$, eſt $ſin.\, s = ſin.(\pi - s)$: ſed hoc modo præcedenti conditioni non ſatisfit. Hinc ejuſmodi expreſſio inveniri debet, quæ ad angulos $s$, $-s$, & $\pi - s$ æqualiter pertineat; talis eſt $cof.\, 2s$, eſt enim $cof.\, 2s = cof. -2s = cof.\, 2(\varpi - s)$. Quocirca æquatio $Z=o$, erit pro Curva duabus Diametris *AB* & *EF* prædita, ſi Z fuerit Functio rationalis ipſarum $z$ & $cof.\, 2s$. Eſt vero $cof.\, 2s = \frac{xx-yy}{zz}$. Ex quo Z debebit eſſe Functio ipſarum $xx+yy$, & $xx-yy$, vel ipſarum $xx$ & $yy$, uti ſupra invenimus.

350. Progrediamur ad Curvas tribus Diametris *AB*, *EF* & *GH* præditas inveſtigandas; quæ Diametri in eodem puncto *C* ad angulos *ACE*, *ECG*, $GCB = 60° = \frac{1}{3}\varpi$ ſe mutuo ſecabunt, atque Diametri alternæ *CA*, *CG*, *CF* ejuſdem erunt indolis. Quare, ſi ponatur $CM = z$, & angulus TAB. XVII. *Fig.* 71.

Lib. II. $ACM = s$, ob $GCM = \frac{2}{3}\pi - s$, æquatio pro Curva $Z = 0$, ita debebit eſſe comparata, ut $Z$ ſit Functio rationalis ipſius $z$, & quantitatis cujuſpiam $w$, quæ ab $s$ ita pendeat, ut maneat eadem, ſive loco $s$ ponatur $-s$, ſive $\frac{2}{3}\pi - s$. Erit ergo $w = coſ.\,3s$; eſt enim $coſ.\,3s = coſ.\,3s = coſ.\,(2\pi - 3s)$. At, poſitis Coordinatis $CP = x$, $PM = y$, erit $coſ.\,3s = \frac{x^3 - 3xyy}{z^3}$, ideoque $Z$ eſſe debet Functio rationalis ipſarum $xx + yy$ & $x^3 - 3xyy$.

351. Quod ſi ergo ponatur $xx + yy = t$ & $x^3 - 3xyy = u$, hæc erit æquatio generalis pro Curvis tribus Diametris prædìtis

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta tt + \epsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \&c.,$$

quæ præbet hanc inter $x$ & $y$

$$0 = \alpha + \beta(xx + yy) + \gamma x(xx - 3yy) + \delta(xx + yy)^2 + \&c.$$

Cum igitur æquatio $0 = \alpha + \beta xx + \beta yy$ ſit pro Circulo, qui, habens infinitas Diametros, etiam quæſtioni de tribus Diametris ſatisfacit; ſimpliciſſima Curva tres habens Diametros erit Linea tertii ordinis hac æquatione expreſſa $x^3 - 3xyy = axx + ayy + b^3$, quæ tres habet Aſymtotas triangulum æquilaterum comprehendentes, in cujus medio exiſtit punctum $C$; & ſingulæ Aſymtotæ ſunt ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$. Pertinent ergo hæ Curvæ ad Speciem quintam ſecundum enumerationem a nobis ſupra factam.

Tab. XVIII. Fig. 72. 352. Si Curva habeat quatuor Diametros $AB$, $EF$, $GH$ & $IK$ ſe mutuo in puncto $C$ ad angulos ſemirectos $= \frac{1}{4}\varpi$ interſecantes, tum Diametri $CA$, $CG$, $CB$, & $CH$ ejuſdem erunt naturæ. Quare, poſita $CM = z$, & angulo $ACM = s$, quæri debet Functio quædam ipſius $s$, quæ non

mutetur ſive loco $s$ ponatur $-s$ ſive $\frac{2}{4}\pi - s$. Talis autem Functio eſt $\cos.\,4s$. Quare, ſi Z fuerit Functio ipſarum $z$ & $\cos.\,4s$; ſeu quod eodem redit, ipſarum $xx + yy$ & $x^4 - 6xxyy + y^4$, tum æquatio $Z = 0$, dabit Curvam quatuor Diametris præditam. Erit ergo Z Functio ipſarum $t$ & $u$; poſitis $t = xx + yy$ & $u = x^4 - 6xxyy + y^4$; Ponatur autem $v = tt - u$, eritque Z Functio ipſarum $t$ & $v$, hoc eſt ipſarum $xx + yy$ & $xxyy$. Vel etiam Z ita definiri poteſt ut ſit Functio harum duarum quantitatum $xx + yy$ & $x^4 + y^4$.

353. Ut Curva æquatione $Z = 0$, expreſſa habeat quinque Diametros, oportet ut Z ſit Functio ipſarum $z$ & $\cos.\,5\,s$. Quare, ſumtis Coordinatis orthogonalibus $x$ & $y$, ob $\cos.\,5\,s = \frac{x^5 - 10x^3yy + 5xy^4}{z^5}$, debebit eſſe Z Functio rationalis harum expreſſionum $xx + yy$ & $x^5 - 10x^3yy + 5xy^4$. Curva igitur ſimpliciſſima, quæ, præter Circulum, quinque habeat Diametros, eſt Linea quinti ordinis, atque hac æquatione exprimetur $x^5 - 10x^3yy + 5xy^4 = a(xx+yy)^2 + b(xx+yy) + c$. Hæc ergo Curva, propter omnes Factores ſupremi membri reales, habebit quinque Aſymtotas ſuis interſectionibus pentagonum regulare, in cujus medio ſit Centrum $C$, formantes.

354. Ex his jam generaliter patet, Curvam æquatione $Z = 0$, expreſſam, habituram eſſe $n$ Diametros, quarum binæ proxime angulum $= \frac{\pi}{n}$ comprehendant, ſi fuerit Z Functio ipſarum $z$ & $\cos.\,n\,s$, ſeu inter Coordinatas orthogonales, Functio quæcunque rationalis harum expreſſionum $xx + yy$ & $x^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{n-4} y^4 -$ &c. Seu æquatio hæc

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta tt + \epsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \theta ttu + \&c.$$

præbebit Curvam $n$ Diametris præditam, ſi ponatur $t = xx + yy$

LIB. II. $\&u = x^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{n-4}y^4 - \&c.$

Hinc ergo Curvæ inveniri poſſunt, quæ tot, quot lubuerit, habeant Diametros ſe mutuo in angulis æqualibus in eodem puncto $C$ interſecantes. Simul vero hæ æquationes in ſe complectuntur omnes omnino Curvas algebraïcas, quæ dato Diametrorum numero ſint præditæ.

TAB. XVII. Fig. 70. 355. Hujuſmodi Curvæ pluribus Diametris præditæ duplo plures habent partes inter ſe ſimiles & æquales. Sic Curva duabus Diametris prædita quatuor habet partes ſimiles & æquales, $AE$, $BE$, $AF$, & $BF$. Curva autem tribus Diametris prædita habet ſex partes ſimiles & æquales $AE$, $GE$, $GB$, $FB$, $FH$ & $AH$. Atque Curva quatuor Diametris prædita octo habet partes ſimiles & æquales $AE$, $AK$, $GE$, $GI$, $BI$, $BF$, $HF$, & $HK$; ſimilique modo numerus partium æqualium ſemper duplo major eſt quam numerus Diametrorum. Quemadmodum autem ſupra vidimus dari Curvas, duas partes ſimiles habentes, quæ tamen Diametro careant, ita dabuntur quoque Curvæ plures partes ſimiles & æquales habentes quæ tamen Diametris deſtituantur.

TAB. XVII. Fig. 71.

TAB. XVIII. Fig. 72.

TAB. XVIII. Fig. 73. 356. Incipiamus a duabus partibus æqualibus ſibi e regione oppoſitis $AME$, $BKF$, quem quidem caſum ſupra jam tractavimus. Quod ſi enim Curva duas tantum habere debent partes æquales, neceſſario ſibi oppoſitæ eſſe debeet, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, $CM = z$, & angulum $ACM = s$, ac manifeſtum eſt angulis $s$ & $\pi + s$ eundem valorem ipſius $z$ convenire opportere; ſumto enim angulo $ACM = \pi + s$, fiet $z = CK$: at eſſe debet $CK = CM$; quærenda ergo eſt expreſſio communis angulis $s$ & $\pi + s$, cujuſmodi eſt *tang.* $s$; eſt enim *tang.* $s =$ *tang.* $(\pi + s)$. Æquatio igitur $Z = 0$, erit pro tali Curva, qualem quærimus, ſi fuerit $Z$ Functio ipſarum $z$ & *tang.* $s$, ſeu Functio ipſarum $xx + yy$ & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque $xx + yy = yy(1 + tt)$.

Digitized by Google

Quare Z debebit eſſe Functio ipſarum $t$ & $yy(1+tt)$, hoc eſt ipſarum $t$ & $yy$: unde eædem æquationes reſultant, quas ſupra invenimus. 

357. Quo autem fractiones, quibus tangentes laborant, evitemus, idem negotium per ſinus & coſinus expedire poterimus. Cum enim ſit & $\mathit{ſin.}\,2s = \mathit{ſin.}\,2(\pi + s)$ & $\mathit{coſ.}\,2s = \mathit{coſ.}\,2(\pi + s)$, quæſitum obtinebitur ſi Z capiatur Functio quæcunque rationalis trium harum formularum $z$, $\mathit{ſin.}\,2s$ & $\mathit{coſ.}\,2s$, ſeu ipſarum $xx + yy$, $2xy$, & $xx - yy$. Ubi notandum eſt, ſi expreſſionum $\mathit{ſin.}\,2s$ & $\mathit{coſ.}\,2s$ altera omittatur, Curvam inſuper Diametrum eſſe habituram. Solutio ergo huc redibit ut Z capiatur Functio ipſarum $xx$, $yy$ & $xy$, rationalis; unde hujuſmodi orietur æquatio

$$0 = \alpha + \beta xx + \gamma xy + \delta yy + \epsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta x^2 y^2 + \theta x y^3 + \iota y^4 + \&c.$$

Atque, ſi termini, in quibus non ineſt $x$, evaneſcant, tota æquatio dividi poterit per $x$ & prodibit

$$0 = \beta x + \gamma y + \epsilon x^3 + \zeta xxy + \eta x y^2 + \theta y^3 + \kappa y^5 + \&c.$$

quæ ſunt ambæ illæ æquationes quas ſupra invenimus.

358. Quæratur nunc Curva, quæ tres tantum habeat partes ſimiles & æquales $AM$, $BN$, & $DL$. Hæc ergo ita erit comparata, ut eductis ex puncto medio $C$ tribus rectis $CM$, $CN$, & $CL$ in angulis æqualibus, eæ ſemper inter ſe futuræ ſint æquales. Poſitis ergo angulo $ACM = s$, & recta $CM = z$; recta $z$ per $s$ ita definietur, ut his tribus angulis $s$, $\frac{2}{3}\pi + s$, & $\frac{4}{3}\pi + s$ idem valor ipſius $z$ conveniat; eſt enim $MCN = NCL = \frac{2}{3}\pi$. Horum autem trium angulorum communes ſunt hæ expreſſiones $\mathit{ſin.}\,3s$ & $\mathit{coſ.}\,3s$. Quare, ſi Z fuerit Functio rationalis harum trium quantitatum $xx + yy$; $3xxy - y^3$; & $x^3 - 3xyy$, æquatio $Z = 0$, dabit Curvas quæſitas omnes. Hujuſmodi ergo orietur æquatio generalis TAB. XVIII. Fig. 74.

Digitized by Google

LIB. II. $0 = \alpha + \beta(xx+yy) + \gamma(3xxy - y^3) + \delta(x^3 - 3xyy) + \epsilon(xx+yy)^2 + \zeta(xx+yy)(3xxy - y^3) + \eta(xx+yy)(x^3 - 3xyy) +$ &c.

Lineæ igitur tertii ordinis hac proprietate præditæ continentur in hac æquatione

$$0 = \alpha + \beta xx + \beta yy + \delta x^3 + 3\gamma xxy - 3\delta xyy - \gamma y^3.$$

TAB. XVIII. *Fig.* 73. 359. Si Curva quatuor habere debeat partes æquales $AM$, $EN$, $BK$ & $FL$, ita ut ex puncto medio $C$ eductis quatuor rectis quibus vis $CM$, $CN$, $CK$ & $CL$, ſub angulis æqualibus, eæ futuræ ſint æquales; ponatur angulus $ACM = s$ & recta $CM = z$; atque, ob angulos $MCN = NCK = KCL = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, recta $z$ per angulum $s$ ita debet exprimi, ut his angulis $s$, $\frac{1}{2}\pi + s$, $\pi + s$; $\frac{3}{2}\pi + s$ idem reſpondeat valor. Hanc vero proprietatem habent expreſſiones *ſin.* $4s$ & *coſ.* $4s$: quare æquatio $Z = 0$, dabit Curvam quatuor ejuſmodi partibus æqualibus præditam, ſi fuerit $Z$ Functio quæcunque rationalis harum trium quantitatum $xx + yy$; $4x^3y - 4xy^3$ & $x^4 - 6xxyy + y^4$. Hinc æquatio generalis pro iſtiuſmodi Curvis erit

$$0 = \alpha + \beta xx + \beta yy + \gamma x^4 + \delta x^3 y + \epsilon xxyy - \delta xy^3 + \gamma y^4 + \&c.$$

360. Simili modo apparet, ſi quæri debeat Curva Diametris deſtituta, quæ tamen quinque habeat partes æquales & ſimiles, in æquatione $Z = 0$, eſſe debere $Z$ Functionem rationalem harum trium quantitatum

$$xx + yy;\ 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 \ \&\ x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4;$$

atque, ſi numerus partium æqualium eſſe debeat $= n$, tum $Z$ eſſe debet Functio rationalis harum trium $xx + yy$,

$nx$

$$nx^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{n-3}y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3\ 4.\ 5}x^{n-5}y^5 = \&c.,$$ CAP. XV.

&

$$x^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{n-4}y^4 - \&c..$$

Quod ſi alterutra poſteriorum expreſſionum non ingrediatur in æquationem, Curva habebit tot Diametros, quot numerus $n$ continet unitates.

361. In duplici hac enumeratione Curvarum aliquot partes æquales habentium, quæ vel Diametris ſint prærditæ vel iis careant, continentur omnino omnes Curvæ algebraïcæ, quæ quidem duas pluresve habeant partes ſimiles & æquales. Quod ut oſtendatur, habeat Curva continua duas partes $OAa$, $OBb$ inter ſe ſimiles & æquales. Jungatur $AB$, ſuperque ea tanquam baſi conſtituatur triangulum iſoſcele $ACB$, cujus angulus $C$ æqualis ſit angulo $O$. Jam, quia anguli $OAC$ & $OBC$ ſunt æquales, erunt quoque Curvæ partes $CAa$ & $CBb$ ſimiles & æquales: atque, ob legem continuitatis, ſi capiantur anguli $BCD$, $DCE$, &c., æquales ſinguli angulo $ACB$, & $CD = CE = CA = CB$, habebit Curva præterea ad has ſingulas rectas partes $Dd$, $Ee$, &c., ſimiles & æquales partibus $Aa$, $Bb$. Niſi ergo ratio anguli $ACB$ ad $360^\circ$ fuerit irrationalis, partium æqualium numerus erit finitus, contra autem infinitus, neque adeo in Lineas algebraïcas cadens. Semper ergo Curva iſta continetur in iis, quas ante inveſtigavimus, Diametris carentes. TAB. XVIII. *Fig.* 75.

362. Sin autem duæ partes ſimiles & æquales in plagas oppoſitas rectarum $AO$ & $BO$ cadant, ita ut ſit pars $AOa$ ſimilis & æqualis parti $OBb$; tum utrinque ducantur rectæ $AR$, & $BS$, ut ſit $OAR = OBS, = \frac{1}{2}AOB$; eruntque rectæ $AR$ & $BS$ inter ſe parallelæ. Jungatur $AB$, & per punctum medium $C$ agatur ipſis $AR$ & $BS$ parallela $CV$, erunt partes $aA$, $bB$ reſpectu rectæ $CV$ ſimiles & æquales. Niſi igitur ſit $ba = 0$, quia Arcui $bB$, a $b$ ad $a$ progrediendo, reſpondet ex altera parte Arcus ſimilis & æqualis $aA$; ita TAB. XIX. *Fig.* 76.



Digitized by Google

LIB. II. quoque huic ab $a$ ad $e$ per ſpatium $ae = ba$ progrediendo, reſpondebit ex altera parte Arcus ſimilis & æqualis $eE$, huicque porro Arcus $dD$, ita ut hæc Curva habitura ſit infinitas partes ſimiles & æquales utrinque circa rectam $CV$ diſpoſitas. Hujuſmodi ergo Curva algebraïca eſſe nequit.

363. Hoc ita ſe habet, ſi recta $AB$ fuerit obliqua ad parallelas $AR$ & $BS$, vel (quod eodem redit,) ſi in triangulo $AOB$ latera $AO$ & $BO$ fuerint inæqualia. Sin autem fuerit $AO = BO$, tum ſimul recta $AB$ erit perpendicularis ad parallelas $AR$ & $BS$, & ad $CV$, quæ ſimul per $O$ tranſibit. Hoc ergo caſu puncta $b$ & $a$ congruent. Et, quia portiones $aA$ & $bB$ non ſolum erunt æquales & ſimiles, ſed etiam utrinque circa rectam $CV$ æqualiter diſpoſitæ, hæc recta $CV$ erit Curvæ Diameter; qui caſus ad priores Curvas expoſitas Diametro gaudentes pertinent. Quocirca ad caſus in hoc Capite expoſitos referuntur omnes omnino Curvæ algebraïcæ, quæ duas pluresve partes habent ſimiles & æquales.

---

## CAPUT XVI.

### *De inventione Curvarum ex datis Applicatarum proprietatibus.*

364. SINT $P$ & $Q$ Functiones quæcunque rationales Abſciſſæ $x$, atque natura Curvæ exprimatur hac æquatione $yy - Py + Q = 0$. Hinc ergo unicuique Abſciſſæ $x$ vel nulla vel duplex reſpondebit Applicata; erit autem harum duarum Applicatarum ſumma $= P$ & productum $= Q$. Si igitur $P$ fuerit quantitas conſtans, ſumma binarum Applicatarum ſingulis Abſciſſis reſpondentium erit conſtans, atque Curva habebit Diametrum; hoc idem autem eveniet ſi fuerit $P = a + nx$; tum enim Linea recta hac æquatione $z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}nx$ contenta erit Diameter, in latiore ſignifica-

tione hoc nomine accepto, ita ut obliquitas non excludatur. Sin autem fuerit $Q$ quantitas conſtans, tum rectangulum binarum Applicatarum erit ubique conſtans; Axis ergo a Curva nuſquam ſecari poterit. At ſi ſit $Q = \alpha + \beta x + \gamma xx$, hæcque expreſſio duos habeat Factores reales, Axis a Curva in duobus punctis trajicietur, atque $Q$ erit multiplum rectanguli ex partibus Axis, ideoque rectangulum Applicatarum ſe habebit ad rectangulum partium Axis in conſtanti ratione. CAP. XVI.

365. Hæ igitur proprietates, quas ſupra Sectionibus conicis convenire obſervavimus, in innumerabiles alias Lineas curvas competunt. Sic, conſtans magnitudo rectangulorum ex binis Applicatis eidem Abſciſſæ reſpondentibus formatorum, qua Hyperbolam ad Aſymtotam relatam gaudere vidimus, communis ipſi eſt cum omnibus Curvis hac æquatione $yy - Py \pm aa = 0$, contentis. Deinde, ſumta recta $EF$ Curvam in duobus punctis $E$ & $F$ ſecante pro Axe, cum in Sectionibus conicis rectangulum $PM.PN$ ad rectangulum $PE.PF$ conſtantem habeat rationem, hæc proprietas Sectionibus conicis communis erit cum omnibus Curvis in hac æquatione $yy - Py + ax - nxx = 0$, contentis. Erit autem $PM.PN = PE.PF$ ſeu $pm.pn - Ep.pF$, ſi fuerit $yy - Py = ax - xx$. Hæc igitur proprietas, qua Circulum præditum eſſe ex Elementis conſtat, non ſolum ipſi communis eſt cum infinitis Curvis altiorum ordinum, ſed etiam in reliquas Sectiones conicas cadit. Sit enim $P = b + nx$, atque æquatio $yy - nxy + xx = ax + by$, quæ eſt pro Circulo ſi $n = 0$, & angulus $EPM$ rectus, complectetur quoque Ellipſin ſi $nn$ minor quam 4, & Hyperbolam ſi $nn$ major quam 4, atque Parabolam ſi $nn = 4$. TAB. V. Fig. 19.

366. Hinc concludimus in omni Sectione conica $AEBF$ cujus Axes, ſeu Diametri principales, ſint $AB$, $EF$, ſi binæ ducantur rectæ quæcunque $pq$ & $mn$, quæ ad Axes principales ſub angulo ſemirecto inclinentur, eas in $h$ ſe mutuo ita eſſe ſecturas, ut ſit $mh.nh = ph.qh$. Quod quidem manifeſtum eſt ex proprietatibus palmariis: ſi enim per Centrum TAB. XIX. Fig. 77.



Digitized by Google

LIB. II. $C$ ducantur rectæ $PQ$ & $MN$ ſub angulis ſemirectis ad Axes principales, erunt inter ſe æquales, ideoque $MC . NC = PC . QC$; quare, cum omnes rectæ his parallelæ eadem lege ſe ſecent, erit quoque $mh . nh = ph . qh$. Quin etiam hinc intelligitur, ſi modo rectæ $MN$ & $PQ$ ita ducantur, ut ad eundem Axem principalem æqualiter inclinentur, ſeu ut ſit $PCA = NCA$, ob $CP = CN$, omnes rectas his parallelas ſe mutuo ita ſecare, ut rectangula partium ſint æqualia, ſcilicet ut ſit $mh . hn = ph . hq$.

TAB. XIX. Fig. 78. 367. His præmiſſis, contemplemur alias quæſtiones circa binas Applicatas cuique Abſciſſæ reſpondentes ex æquatione $yy - Py + Q = 0$. Sit $AP$ Abſciſſa $= x$, cui reſpondeant duæ Applicatæ $PM$, $PN$: ac primo quærantur omnes Curvæ hujus indolis ut ſit $PM^2 + PN^2$ quantitas conſtans $= aa$. Cum ſit $PM + PN = P$ & $PM . PN = Q$, erit $PM^2 + PN^2 = PP - 2Q$, & quæſito ſatisfiet ſi fuerit $PP - 2Q = aa$ ſeu $Q = \frac{PP - aa}{2}$; unde, pro Curvis deſideratis obtinebitur iſta æquatio $yy - Py + \frac{PP - aa}{2} = 0$. Quod ſi ponatur $P = 2nx$, prodibit Sectio conica proprietate propoſita gaudens, $yy - 2nxy + 2nnxx - \frac{1}{2}aa = 0$, quæ æquatio eſt pro Ellipſi, Abſciſſis a Centro computatis.

TAB. XIX. Fig. 79. 368. Hinc ſequitur non inelegans Ellipſium proprietas iſta. Si circa Ellipſeos duas quaſvis Diametros conjugatas $AB$ & $EF$ deſcribatur parallelogrammum $GHIK$ cujus latera Ellipſin tangent in punctis $A$, $B$, $E$, $F$, hujus parallelogrammi diagonales $GK$ & $HI$ omnes chordas $MN$ alterutri Diametro $EF$ parallelas ita ſecabunt in $P$ & $p$, ut ſit quadratorum ſumma $PM^2 + PN^2$ vel $pM^2 + pN^2$ perpetuo conſtans nempe æqualis $2CE^2$. Similique modo ducta chorda $RS$ Diametro alteri $AB$ parallela erit $PR^2 + PS^2 = \varpi R^2 + \varpi S^2 = 2CA^2$. Poſitis enim $CA = CB = a$, $CE = CF = b$, $CQ = t$, $QM = u$, erit $aauu + bbtt = aabb$. Jam eſt $a : b = CQ\,(t)$:

$PQ$, & $CP$ ad $CQ$ ratione data, puta $m:1$. Quare, poſita $CP = x$, $PM = y$, erit $x = mt$ & $y = u + \frac{bt}{a}$, ſeu $t = \frac{x}{m}$, & $u = y - \frac{bx}{ma}$, quibus valoribus ſubſtitutis orietur iſta æquatio $aayy - \frac{2abxy}{m} + \frac{2bbxx}{mm} = aabb$. Sit $\frac{b}{ma} = n$, erit $yy - 2nxy + 2nnxx = bb$, quæ eſt æquatio ante inventa indicans eſſe $PM^2 + PN^2$ magnitudinem conſtantem. CAP. XVI.

369. Quærantur nunc Curvæ in quibus ſit ſumma cuborum $PM^3 + PN^3$ perpetuo quantitas conſtans. Cum ſit $PM + PN = P$, erit $PM^3 + PN^3 = P^3 - 3PQ$: quare, ſi ponatur $PM^3 + PN^3 = a^3$, erit $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$: ideoque pro his Curvis erit æquatio generalis $yy - Py + \frac{1}{3}P^2 - \frac{a^3}{3P} = 0$, ubi pro $P$ Functionem quamcunque rationalem ipſius $x$ ſubſtituere licet. Simpliciſſima ergo Curva hanc habens proprietatem erit Linea tertii ordinis, quæ, ponendo $P = 3nx$, & $a = 3nb$, hac æquatione exprimetur TAB. XIX. Fig. 78.

$$xyy - 3nxxy + 3nnx^3 - 3nnb^3 = 0,$$

quæ pertinet ad Speciem ſecundam ſecundum enumerationem ſupra factam.

370. Simili modo, ſi effici debeat ut ſit $PM^4 + PN^4$ conſtans, quia eſt $PM^4 + PN^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ$, quantitas $Q$ per $P$ ita determinari debet ut ſit $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$ ſeu $Q = PP + \surd(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)$. Quia vero tam $P$ quam $Q$ debent eſſe Functiones rationales ſeu uniformes ipſius $x$, ne $y$ plures quam duos valores pro quavis Abſciſſa $x$ induere poſſit, quantitas $\surd(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)$ deberet eſſe rationalis; quod cum fieri nequeat, Functio $Q$ ſemper erit biformis, ideoque Applicatam $y$ reddet Functionem qua-

Digitized by Google

LIB. II. driformem. Verum ex æquatione $yy - Py + Q = 0$, elicitur $y = \frac{1}{2} P \pm \sqrt{(-\frac{3}{4} PP \pm \sqrt{(\frac{1}{2} P^4 + \frac{1}{2} a^4)})}$, unde patet Applicatam $y$ realem eſſe non poſſe niſi $\sqrt{(\frac{1}{2} P^4 + \frac{1}{2} a^4)}$ affirmative ſumatur; quare, non obſtante Functionis $Q$ biformitate, Applicata $y$ nunquam plures duobus valores habebit, quorum biquadratorum ſumma erit conſtans, ſicut natura quæſtionis requirit.

371. Quod ſi porro ejuſmodi requiratur Curva, ut binorum ipſius $y$ valorum cuique Abſciſſæ $x$ reſpondentium poteſtates quintæ ſummam conſtantem conſtituant, ſeu ut ſit $PM^5 + PN^5 = a^5$, debebit eſſe $P^5 - 5P^3Q + 5PQ^2 = a^5$. Cum igitur ex æquatione pro Curva $yy - Py + Q = 0$, ſit $Q = -yy + Py$; erit $P^5 - 5P^4y + 10P^3yy - 10P^2y^3 + 5Py^4 = a^5$, ſeu $(P - y)^5 + y^5 = a^5$. Eodem modo reperietur, ſi debeat eſſe $PM^6 + PN^6 = a^6$ hæc æquatio $(P - y)^6 + y^6 = a^6$. Atque generaliter ſi quæratur Curva in qua ſit $PM^n + PN^n = a^n$, obtinebitur iſta æquatio $(P - y)^n + y^n = a^n$: ubi pro $P$ Functio quæcunque uniformis ipſius $x$ pro lubitu accipi poteſt. Ratio autem hujus æquationis in promptu eſt: cum enim ſumma ambarum Applicatarum ſit $= P$, ſi altera ſit $y$, altera erit $= P - y$, unde ſtatim ſit $(P - y)^n + y^n = a^n$.

372. Quod ſi autem loco $Q$ eliminetur $P$, ponendo in æquationibus, quibus relatio inter $P$ & $Q$ continetur, $P = \frac{yy + Q}{y}$, orietur pro $PM^n + PN^n = a^n$ hæc æquatio $y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n$. Cum enim Applicatarum productum ſit $= Q$, ſi una ponatur $= y$, erit altera $= \frac{Q}{y}$: unde æquatio in-

venta ſtatim fluit. Pro Curvis ergo, in quibus ſit $PM^n + PN^n = a^n$, duas nacti ſumus æquationes generales, alteram $(P-y)^n + y^n = a^n$, alteram $y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n$: ex quarum poſteriori emergit $y^{2n} = a^n y^n - Q^n$, & $y^n = \frac{1}{2} a^n \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^{2n} - Q^n)}$, ita ut ſit $y = \sqrt[n]{(\frac{1}{2} a^n \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^{2n} - Q^n)})}$, quæ eſt Functio tantum biformis, atque pro quavis Abſciſſa plures duabus Applicatas non exhibet, dummodo $Q^n$ fuerit Functio rationalis ſeu uniformis, ipſius $x$. Prior autem æquatio $y^n + (P-y)^n = a^n$ hac gaudet prærogativa ut numerus dimenſionum ſit minor.

373. Neque vero hæ æquationes ſolum quæſtionem ſolvunt ſi $n$ ſit numerus integer affirmativus, ſed etiam ſi ſit vel negativus vel fractus. Sic

| ſi debeat eſſe | habebitur hæc æquatio, |
|---|---|
| $\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{a}$ | $aP = Py - yy$<br>ſeu<br>$aQ + ayy = Qy$ |
| $\frac{1}{PM^2} + \frac{1}{PN^2} = \frac{1}{a^2}$ | $a^2y^2 + a^2(P-y)^2 = y^2(P-y)^2$<br>ſeu<br>$a^2Q^2 + a^2y^4 = Q^2y^2$ |
| $\frac{1}{PM^3} + \frac{1}{PN^3} = \frac{1}{a^3}$ | $a^3y^3 + a^3(P-y)^3 = y^3(P-y)^3$<br>ſeu<br>$a^3Q^3 + a^3y^6 = Q^3y^3$ |

&c.

LIB. II. Pro exponentibus autem fractis ita res ſe habebit :

| ſi debeat eſſe | habebitur hæc æquatio |
|---|---|
| $\sqrt{PM}+\sqrt{PN}=\sqrt{a}$ | $\sqrt{y}+\sqrt{(P-y)}=\sqrt{a}$<br>ſeu<br>$y=\sqrt{ay}-\sqrt{Q}$<br>quæ ad rationalitatem reductæ præbent<br>$yy-Py+\frac{1}{4}(a-P)^2=0$<br>ſeu<br>$yy-(a-2\sqrt{Q})y+Q=0$ |
| $\sqrt[3]{PM}+\sqrt[3]{PN}=\sqrt[3]{a}$ | $\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{(P-y)}=\sqrt[3]{a}$<br>vel<br>$yy-Py+\frac{1}{27a}(a-P)^3=0$<br>ſeu<br>$\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{\frac{Q}{y}}=\sqrt[3]{a}$<br>vel<br>$yy-(a-3\sqrt[3]{aQ})y+Q=0$<br>&c. |

Hoc igitur modo omnes Curvæ algebraïcæ, in quibus ubique ſit $PM^n + PN^n = a^n$, una æquatione generali comprehendi poſſunt, ſive $n$ ſit numerus integer affirmativus, ſive negativus, ſive fractus.

374. Quæ hic de conditione duarum Applicatarum unicuique Abſciſſæ $x$ reſpondentium ſunt expoſita, eadem methodo transferri poſſunt ad ternas Applicatas ſingulis Abſciſſis reſpondentes. Æquatio autem generalis pro Curvis, quas ſingulæ Applicatæ in tribus punctis ſecant eſt hæc

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0,$$

denotantibus litteris $P$, $Q$, & $R$ Functiones quaſcunque uniformes

formes ipſius $x$. Sint $p$, $q$, $r$ tres Applicatæ Abſciſſæ $x$ reſpondentes, quarum una quidem ſemper eſt realis, verum hic ad ea potiſſimum Curvæ loca ſpectamus, in quibus omnes tres Applicatæ ſint reales. Erit autem ex natura æquationum $P = p + q + r$; $Q = pq + pr + qr$; & $R = pqr$. Quare, ſi Curva deſideretur, in qua ſit vel $p + q + r$ vel $pq + pr + qr$, vel $pqr$ quantitas conſtans, nil aliud eſt faciendum niſi ut vel $P$, vel $Q$, vel $R$ quantitas conſtituatur conſtans, binis reliquis manentibus arbitrariis. CAP. XVI.

375. Hinc quoque Curvæ inveniri poterunt, in quibus ſit $p^n + q^n + r^n$, quantitas conſtans ubique; eſt enim, per ea quæ in ſuperiori libro ſunt tradita,

$$p + q + r = P$$
$$p^2 + q^2 + r^2 = P^2 - 2Q$$
$$p^3 + q^3 + r^3 = P^3 - 3PQ + 3R$$
$$p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR$$
$$p^5 + q^5 + r^5 = P^5 - 5P^3Q + 5PQQ + 5PPR - 5QR$$

&c.

Deinde, ſi $n$ ſit numerus negativus, ponatur $z = \frac{1}{y}$; erit $z^3 - \frac{Qzz}{R} + \frac{Pz}{R} - \frac{1}{R} = 0$, & hujus æquationis tres radices ſunt $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$. Hinc ſimili modo erit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{Q}{R}$$
$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{Q^2 - 2PR}{RR}$$
$$\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} = \frac{Q^3 - 3PQR + 3RR}{R^3}$$
$$\frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r^4} = \frac{Q^4 - 4PQQR + 4QRR + 2P^2R^2}{R^4}$$

&c.

LIB. II. Hujuſmodi ergo expreſſio quantitati conſtanti æqualis poſita præbebit relationem idoneam inter Functiones $P$, $Q$ & $R$. Atque, ſi hujus æquationis ope, ex æquatione $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$, una harum Functionum $P$, $Q$, vel $R$ eliminetur, habebitur æquatio pro Curva quæſita. Sic, ſi quæratur Curva in qua ſit $p^3 + q^3 + r^3 = a^3$, fiet $P^3 - 3PQ + 3R = a^3$; &, ob $R = y^3 - Py^2 + Qy$, habebitur hæc æquatio $3y^3 - 3Py^2 + 3Qy + P^3 - 3PQ = a^3$ pro Curvis quæſito ſatisfacientibus.

376. Sive igitur $n$ ſit numerus affirmativus ſive negativus integer, ſolutio per datas formulas facile expedietur; at major difficultas occurrit ſi $n$ fuerit numerus fractus. Proponatur quærenda Linea curva, in qua ſit $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = \sqrt{a}$. Sumantur utrinque quadrata: atque, ob $p + q + r = P$, habebitur $P + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} = a$, ſeu $\frac{a - P}{2} = \sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr}$. Sumantur denuo quadrata; atque, ob $pq + pr + qr = Q$, erit $\frac{(a-P)^2}{4} = Q + 2\sqrt{p^2qr} + 2\sqrt{pq^2r} + 2\sqrt{pqr^2} = Q + 2(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{pqr} = 2\sqrt{aR} + Q$: unde oritur $(a - P)^2 = 4Q + 8\sqrt{aR}$, ſeu $Q = \frac{(a-P)^2}{4} - 2\sqrt{aR}$. Quare, Curvæ quæſitæ continebuntur in hac æquatione $y^3 - Pyy + (\frac{1}{4}(a-P)^2 - 2\sqrt{aR})y - R = 0$; ſeu, (ſublata irrationalitate, ob $R = \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a}$,) in hac æquatione $y^3 - Pyy + Qy - \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a} = 0$.

377. Hæc autem operatio nimis fit moleſta, ſi radices altiorum poteſtatum proponantur: alia ergo via erit ineunda, quæ ex hoc exemplo perſpicietur. Quæratur nempe Curva in qua ſit $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{a}$. Ponatur $\sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{pr} + \sqrt[3]{qr} = v$: &, cum ſit $\sqrt[3]{pqr} = \sqrt[3]{R}$, fiet $\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} + \sqrt[3]{r^2} = \sqrt[3]{aa} -$

$2v$; & $p+q+r=a-3v\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{R}=P$. Deinde, $\sqrt[3]{p^2q^2}+\sqrt[3]{p^2r^2}+\sqrt[3]{q^2r^2}=v^2-2\sqrt[3]{aR}$, & $pq+pr+qr=Q=v^3-3v\sqrt[3]{aR}+3\sqrt[3]{RR}$. Inventis jam pro $P$ & $Q$ idoneis valoribus, ſumendo pro $v$ Functionem quamcunque ipſius $x$, pro Curvis quæſitis obtinebitur hæc æquatio 

$$y^3-(a-3v\sqrt{a}+3\sqrt[3]{R})y^2+(v^3-3v\sqrt[3]{aR}+3\sqrt[3]{R^2})y-R=0.$$

378. His tamen difficultatibus non obſtantibus ſolutio generalis concinnari poterit. Cum enim ex æquatione $y^3-Py^2+Qy-R=0$, $y$ denotet has tres Applicatas $p$, $q$, & $r$, ponatur $p=y$, erit $P=y+q+r$, & $Q=qy+ry+qr$, ſeu $q+r=P-y$, & $qr=Q-y(q+r)=Q-Py+yy$. Hinc prodit $q-r=\sqrt{(P^2+2Py-3yy-4Q)}$: ideoque

$$q=\tfrac{1}{2}(P-y)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2+2Py-3yy-4Q)},$$

&

$$r=\tfrac{1}{2}(P-y)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2+2Py-3yy-4Q)}.$$

Quando ergo quæritur Curva in qua ſit $p^n+q^n+r^n=a^n$, ſatisfaciet hæc æquatio

$$y^n+(\tfrac{1}{2}(P-y)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2+2Py-3yy-4Q)})^n+(\tfrac{1}{2}(P-y)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2+2Py-3yy-4Q)})^n=a^n$$

quæ æque quæſtionem ſolvit, ſive $n$ fuerit numerus integer ſive fractus.

379. Innumerabiles aliæ quæſtiones circa conditionem harum trium Applicatarum eadem methodo reſolvi poſſunt: velut, ſi pro $a^n$ Functio quæcunque ipſius $x$ aſſumatur; tum vero etiam, præter ſummam quarumcunque poteſtatum, aliæ Functiones ipſarum $p$, $q$, & $r$ proponi poſſunt, dummodo hæ quantitates ita æqualiter inſint, ut earum permutatione nulla variatio



Digitized by Google

 oriatur. Sic, iſtæ tres Applicatæ $p$, $q$, & $r$ eidem Abſciſſæ $x$ reſpondentes ita definiri poterunt, ut triangulum, quod ex iis formatur, conſtantem habeat aream. Hujus enim trianguli area erit $= \frac{1}{4}\sqrt{(2ppqq + 2pprr + 2qqrr - p^4 - q^4 - r^4)}$ quæ ponatur $= aa$. Cum igitur ſit $p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 4PR + 2QQ$, & $p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = Q^2 - 2PR$, fiet $16a^4 = 4P^2Q - 8PR - P^4$, & $R = \frac{1}{2}PQ - \frac{1}{8}P^3 - \frac{2a^4}{P}$; ideoque habebitur iſta æquatio $y^3 - Pyy + Qy - \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{8}P^3 + \frac{2a^4}{P} = 0$. Si $P$ capiatur conſtans $= 2b$, fiet inſuper perimeter omnium horum triangulorum conſtans. Quare, ſi ſumatur $Q = mxx + nbx + kaa$, prodibit Linea tertii ordinis hac æquatione expreſſa

$$y^3 + mxxy - 2byy + nbxy - mbxx + kaay - nbbx + \frac{a^4}{b} - kaab + b^3 = 0,$$

cujus hæc erit proprietas, ut trium Applicatarum $p$, $q$, & $r$ ſingulis Abſciſſis reſpondentium primum ſumma ſit conſtans, $= 2b$, tum vero Area trianguli ex lateribus $p$, $q$, & $r$ formati ſit ubique eadem $= aa$.

380. Similes quæſtiones ejuſdem methodi ope reſolvi poſſunt circa quatuor pluresve Applicatas eidem Abſciſſæ reſpondentes; in quo negotio cum nulla amplius occurrat difficultas, ad alias progrediamur quæſtiones, in quibus Applicatæ non eidem Abſciſſæ, ſed diverſis reſpondentes inter ſe comparentur. Propoſita ſcilicet relatio quædam inter Applicatas $PM$ & $QN$, quarum altera Abſciſſæ $AP = +x$, altera Abſciſſæ $AQ = -x$ reſpondeat. Sit $y = X$, æquatio pro hac Curva, exiſtente $X$ Functione quacunque ipſius $x$, atque hæc Functio $X$ dabit Applicatam $PM$: quod ſi vero loco $+x$ ubique ponatur $-x$, eadem Functio $X$ dabit alteram Applicatam $QN$. Si ergo $X$ eſſet Functio par ipſius $x$, puta $= P$, foret $QN = PM$, ſin autem ſit $X$ Functio impar

TAB. XIX. *Fig.* 80.

ipſius $x$, puta $= Q$, erit $QN = - PM$. Atque ſi $P$ & $R$ denotent Functiones pares, at $Q$ & $S$ Functiones impares ipſius $x$, fueritque æquatio pro Curva $y = \frac{P+Q}{R+S}$, erit $PM = \frac{P+Q}{R+S}$ & $QN = \frac{P-Q}{R-S}$. 

381. Quærenda ſit Curva hujus indolis, ut ſit $PM + QN$ quantitas conſtans, nempe $= 2AB = 2a$. Atque manifeſtum eſt huic quæſtioni ſatisfacere æquationem $y = a + Q$, exiſtente $Q$ Functione impare ipſius $x$; erit enim $PM = a + Q$ & $QN = a - Q$ ideoque $PM + QN = 2a$, uti requiritur. Quod ſi ergo ponatur $y - a = u$, erit $u = Q$, quæ erit æquatio pro eadem Curva, ſumta recta $Bp$ pro Axe & puncto $B$ pro Abſciſſarum $x$ initio, ita ut ſit $Bp = x$ & $pM = u$. Æquatio autem $u = Q$ indicat Curvam partibus æqualibus utrinque circa Centrum $B$ alternatim diſpoſitis præditam. Deſcripta ergo hujuſmodi Curva quacunque $MBN$ ſumtaque recta quacunque $PQ$ pro Axe, quæſtioni ita ſatisfiet, ut demiſſo in hunc Axem ex Centro $B$ perpendiculo $BA$, ſumtiſque utrinque Abſciſſis æqualibus $AP = AQ$, ſemper futura ſit ſumma $PM + QN$ conſtans $= 2AB$.

382. Pro Curvis autem, quæ duas habent partes æquales circa Centrum $B$ alternatim diſpoſitas, duas invenimus ſupra æquationes, quæ inter Coordinatas $x$ & $u$ ſunt.

I.

$$0 = \alpha x + \beta u + \gamma x^3 + \delta x^2 u + \epsilon xuu + \zeta u^3 + \eta x^5 + \theta x^4 u + \&c.$$

II.

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma xu + \delta u^2 + \epsilon x^4 + \zeta x^3 u + \eta x^2 u^2 + \theta xu^3 + \&c.$$

Quare, ſi in utraque harum æquationum, ponatur $u = y - a$, habebuntur duæ æquationes generales inter Coordinatas $x$ & $y$ pro Curvis algebraïcis quæſtioni propoſitæ ſatisfacientibus. Satisfacit ergo primo omnis Linea recta per punctum $B$ ducta, deinde quoque omnis Sectio conica Centrum habens in puncto $B$ quæſtionem ſolvet. Quia vero hoc poſteriori caſu utri-

LIB. II. que Abſciſſæ $AP$, & $AQ$ gemina Applicata reſpondet, (niſi Curva exiſtente Hyperbola, Applicatæ alteri Aſymtotæ parallelæ capiantur;) bina habebuntur Applicatarum paria eandem ſummam conſtituentia.

383. Si quæratur Curva $MBN$, in qua non ſumma binarum Applicatarum $PM$ & $QN$, ſed ſumma quarumcunque poteſtatum earum ſit conſtans, ſolutio ſimili modo abſolvetur. Oporteat enim eſſe $PM^n + QN^n = 2a^n$: atque perſpicuum eſt huic conditioni ſatisfieri hac æquatione $y^n = a^n + Q$, exiſtente $Q$ Functione quacunque impari ipſius $x$: erit enim $PM^n = a^n + Q$, & $QN^n = a^n - Q$: ideoque $PM^n + QN^n = 2a^n$. Ponatur $y^n - a^n = u$, atque æquatio $u = Q$ exprimet naturam Curvæ duabus partibus æqualibus alternis circa Centrum $B$ diſpoſitis præditam inter Coordinatas $x$ & $u$. Quam ob rem ſi in æquationibus §. præcedenti datis ubique loco $u$ ſcribatur $y^n - a^n$, prodibunt æquationes generales pro Curvis quæſito ſatisfacientibus.

384. Cum igitur hujuſmodi quæſtiones nihil habeant difficultatis, propoſita ſit hæc quæſtio, qua quæritur Curva $MBN$, ita ut in Axe a puncto fixo $A$, ſi ſumantur utrinque Abſciſſæ $AP$, $AQ$ æquales, rectangulum Applicatarum $PM \cdot QN$ futurum ſit magnitudinis conſtantis, puta $= aa$. Hujus quæſtionis plures dari poſſunt ſolutiones particulares, quarum præcipuas, antequam in generalem inquiramus, hic evolvamus. Sit $P$ Functio par, & $Q$ Functio impar ipſius Abſciſſæ $AP = x$, ac ponatur Applicata $PM = y = P + Q$; ex qua, ſumta $x$ negativa, fiet $QN = P - Q$. Oportet ergo eſſe $PM \times QN = PP - QQ = aa$, ſeu $P = \sqrt{(aa + QQ)}$: quæ expreſſio $\sqrt{(aa + QQ)}$, quia $QQ$ eſt Functio par ipſius $x$, ac propterea quoque ipſa Functionem parem exhibet, conve-

nientem valorem pro $P$ præbet. Hinc pro Curva quæſita habebitur iſta æquatio $y = Q + \surd(aa + QQ)$, ſumendo pro $Q$ Functionem quamcunque imparem ipſius $x$.

385. Cum autem ſignum radicale per ſe ambiguitatem involvat, unicuique Abſciſſæ $x$ gemina reſpondebit Applicata, altera affirmativa altera negativa; ſic, Abſciſſæ $AP$ reſpondebunt Applicatæ $Q + \surd(aa + QQ)$ & $Q - \surd(aa + QQ)$; at Abſciſſæ $AQ$ convenient Applicatæ $-Q + \surd(aa + QQ)$ & $-Q - \surd(aa + Q)$: unde Curva partes habebit æquales circa punctum $A$, tanquam Centrum, alternatim poſitas. Neque vero hanc ambiguitatem a ſigno ortam tollere licet, ſumendo pro $Q$ ejuſmodi Functionem imparem, uti $\frac{aa}{4x} - x$, qua fiat $aa + QQ$ quadratum; fieret enim $\surd(aa + QQ) = \frac{aa}{4x} + x$ ideoque Functio impar, quæ in locum ipſius $P$ ſubſtitui non poſſet. Quocirca pro $Q$ ejuſmodi Functio impar ipſius $x$ ſumi debet, ut $aa + QQ$ non fiat quadratum.

386. Simili modo, ſi ponatur $y = (P + Q)^n$, fiet $QN = (P - Q)^n$: ideoque eſſe debebit $(P^2 - Q^2)^n = aa$. Hinc fiet $P^2 = a^{\frac{2}{n}} + Q^2$, & $P = \surd(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)$, quæ quantitas, dummodo fuerit irrationalis, pro $P$ aſſumi poterit, Quare pro Curva quæſtioni ſatisfaciente obtinebitur hæc æquatio $y = (Q + \surd(a^{\frac{2}{n}} + Q^2))^n$. Conſtructio autem harum Curvarum erit facilis: deſcribatur Curva quæcunque duas partes ſimiles & æquales habens alternatim circa Centrum $A$ poſitas, hujuſque Curvæ Applicata Abſciſſæ $AP = x$ reſpondens ponatur $= z$; erit $z$ Functio impar ipſius $x$; ideoque in locum ipſius $Q$ ſubſtitui poterit. At, ex æquatione inventa oritur $y^{\frac{1}{n}} - Q = \surd(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)$: ideoque $Q =$

LIB. II.

$z = \frac{y^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{2}{n}}}{2y^{\frac{1}{n}}}$. Ponatur $\frac{1}{n} = m$; atque, ſi in æquatione inter $z$ & $x$ data ubique ponatur $z = \frac{y^{2m} - a^{2m}}{2y^{m}}$, obtinebitur æquatio inter $x$ & $y$ pro Curva quæſita. Cum igitur inter $z$ & $x$ binas invenerimus æquationes; ſcilicet, vel

$$0 = x + \beta xx + \gamma xz + \delta zz + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 z + \eta x^2 z^2 + \theta x z^3 + \&c.$$

vel

$$0 = \alpha x + \beta z + \gamma x^3 + \delta x^2 z + \varepsilon x z^2 + \zeta z^3 + \eta x^5 + \theta x^4 z + \&c.$$

ſi in his æquationibus ponatur $z = y^m - \frac{a^{2m}}{y^m}$ (diviſorem 2 negligimus quia pro $Q$ quodcunque multiplum ipſius $z$ ſumi poteſt), duæ orientur æquationes generales pro Curvis quæſito ſatisfacientibus.

387. Sit, præter $P$, quoque $R$ Functio par, & præter $Q$ quoque $S$ Functio impar ipſius $x$, ac ſtatuatur pro Curvis quæſitis hæc æquatio $y = \frac{P + Q}{R + S} = PM$: erit ergo $QN = \frac{P - Q}{R - S}$, fietque $\frac{PP - QQ}{RR - SS} = aa$, cui conditioni facillime ſatisfit ponendo $y = \frac{P + Q}{P - Q} a$, vel etiam ſtatuendo $y = \left(\frac{P + Q}{P - Q}\right)^n a$. Hoc modo prius incommodum, quod cuique Abſciſſæ duæ pluresve Applicatæ reſpondebant, evitatur, atque ejuſmodi Curvæ inveniuntur, ut ſingulis Abſciſſis unica tantum Applicata reſpondeat. Hinc Curva ſimpliciſſima ſatisfaciens erit Linea ſecundi ordinis hac æquatione $y = \frac{b + x}{b - x} a$ contenta; atque ideo Hyperbola. Hyperbola vero etiam ſatisfacit æquationi

Digitized by Google

æquationi prius inventæ $y = Q + \surd(aa + QQ)$, ponendo $Q = nx$: erit enim $yy - 2nxy = aa$. Unde huic problemati duplici modo per Hyperbolam ſatisfieri poteſt. CAP. XVI.

388. His præmiſſis, perſpicuum eſt æquationem pro Curva quæſita ita comparatam eſſe debere, ut ea, ſi loco $x$ ponatur $-x$, & $\frac{aa}{y}$ loco $y$, nullam alterationem patiatur. Hujuſmodi formulæ ſunt $(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n})P$, & $(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n})Q$; ſi quidem $P$ Functionem parem & $Q$ imparem ipſius $x$ denotet. Quod ſi ergo æquatio formetur, quæ ex quotcunque hujuſmodi formulis fuerit compoſita, ea erit pro Curva quæſtioni ſatisfaciente. Quod ſi ergo $M$, $P$, $R$, $T$, &c., denotent Functiones quaſcunque pares ipſius $x$, atque $N$, $Q$, $S$, $V$, &c. Functiones impares, ſequens æquatio generalis habebitur

$$0 = M + (\frac{y}{a} + \frac{a}{y})P + (\frac{yy}{aa} + \frac{aa}{yy})R + (\frac{y^3}{a^3} + \frac{a^3}{y^3})T \text{ \&c.}$$
$$+ (\frac{y}{a} - \frac{a}{y})Q + (\frac{yy}{aa} - \frac{aa}{yy})S + (\frac{y^3}{a^3} - \frac{a^3}{y^3})V \text{ \&c.}$$

quæ ſi multiplicetur per Functionem imparem ipſius $x$, Functiones pares in impares & viciſſim permutabuntur: unde etiam hujuſmodi æquatio ſatisfaciet

$$0 = N + (\frac{y}{a} + \frac{a}{y})Q + (\frac{yy}{aa} + \frac{aa}{yy})S + (\frac{y^3}{a^3} + \frac{a^3}{y^3})V \text{ \&c.}$$
$$+ (\frac{y}{a} - \frac{a}{y})P + (\frac{yy}{aa} - \frac{aa}{yy})R + (\frac{y^3}{a^3} - \frac{a^3}{y^3})T \text{ \&c.}$$

quæ æquationes a fractionibus liberatæ dabunt has æquationes rationales ordinis indefiniti $n$

I.

$$0 = a^n y^n M + a^{n-1} y^{n+1}(P+Q) + a^{n-2} y^{n+2}(R+S) + a^{n-3} y^{n+3}(T+V) \text{ \&c.}$$
$$+ a^{n+1} y^{n-1}(P-Q) + a^{n+2} y^{n-2}(R-S) + a^{n+3} y^{n-3}(T-V) \text{ \&c.}$$

II.

$$0 = a^n y^n N + a^{n-1} y^{n+1}(P+Q) + a^{n-2} y^{n+2}(R+S) + a^{n-3} y^{n+3}(T+V) \text{ \&c.}$$
$$- a^{n+1} y^{n-1}(P-Q) - a^{n+2} y^{n-2}(R-S) - a^{n+3} y^{n-3}(T-V) \text{ \&c.}$$

389. In formulis vero $(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n})P$, & $(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n})Q$ loco $n$ quoque numeros fractos ſcribere licet. Quare, ſi pro $n$ ſcribantur numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. ex æquationibus generalibus hinc oriundis irrationalitas ſponte evaneſcet, habebitur enim

$$0 = \frac{y+a}{\sqrt{ay}}P + \frac{y^2+a^2}{ay\sqrt{ay}}R + \frac{y^3+a^3}{a^2y^2\sqrt{ay}}T + \text{\&c.}$$
$$+ \frac{y-a}{\sqrt{ay}}Q + \frac{y^2-a^2}{ay\sqrt{ay}}S + \frac{y^3-a^3}{a^2y^2\sqrt{ay}}V + \text{\&c.}$$

vel hæc æquatio

$$0 = + \frac{y+a}{\sqrt{ay}}Q + \frac{y^2+a^2}{ay\sqrt{ay}}S + \frac{y^3+a^3}{a^2y^2\sqrt{ay}}V + \text{\&c.}$$
$$+ \frac{y-a}{\sqrt{ay}}P + \frac{y^2-a^2}{ay\sqrt{ay}}R + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}}T + \text{\&c.}$$

quæ a fractionibus liberatæ abeunt in has

$$0 = + a^n y^{n+1}(P-Q) + a^{n-1} y^{n+2}(R+S) + a^{n-2} y^{n+3}(T+V) \text{ \&c.}$$
$$+ a^{n+1} y^n (P+Q) + a^{n+2} y^{n-1}(R-S) + a^{n+3} y^{n-2}(T-V) \text{ \&c.}$$

&

$$0 = + a^n y^{n+1}(P+Q) + a^{n-1} y^{n+2}(R+S) + a^{n-2} y^{n+3}(T+V) \text{ \&c.}$$
$$- a^{n+1} y^n (P-Q) - a^{n+2} y^{n-1}(R-S) - a^{n+3} y^{n-2}(T-V) \text{ \&c.}$$

390. Ex his quatuor æquationibus jam ex ſingulis Linearum ordinibus eæ, quæ problema reſolvant, facile invenientur. Ac primo quidem, ex primo ordine ſatisfacit Linea recta Axi $AP$ parallela ac per punctum $B$ tranſiens. Ex ordine ſecundo binæ æquationes priores, faciendo $n = 1$, dant $\alpha axy + yy - aa = 0$, quæ ex ſecunda naſcitur, ponendo $N = \alpha x$, & $P = 1$, & $Q = 0$. Prima enim nullam dat Lineam curvam; binæ poſteriores æquationes dant, faciendo $n = 0$, $y(\alpha + \beta x) \pm a(\alpha - \beta x) = 0$. Ex ordine tertio binæ æquationes priores dant, faciendo $n = 1$

$$0 = ay(\alpha + \beta xx) + yy(\gamma + \delta x) + aa(\gamma - \delta x)$$

&

$$0 = \alpha ayx + yy(\gamma + \delta x) - aa(\gamma - \delta x)$$

binæ autem æquationes poſteriores dant, ponendo $n = 0$, & $n = 1$

$$0 = y(\alpha + \beta x + \gamma xx) \pm a(\alpha - \beta x + \gamma xx)$$

&

$$0 = ay^2(\alpha + \beta x) + y^3 \pm a^2 y(\alpha - \beta x) \pm a^3$$

ſimilique modo ex ſequentibus ordinibus omnes Lineæ quæſito ſatisfacientes reperientur.

## CAPUT XVII.

### *De inventione Curvarum ex aliis proprietatibus.*

391. QUÆSTIONES, quas in præcedente Capite reſolvimus, ita erant comparatæ, ut ad æquationem inter Coordinatas, ſive rectangulas ſive obliquangulas, facile revocari poſſunt. Nunc igitur ejuſmodi proprietates contemplemur, quæ non immediate Applicatas inter ſe parallelas reſpiciant; veluti, ſi rectarum ex dato quodam puncto ad Curvam eductarum indoles quæpiam proponatur. Sit $C$ punctum, unde rectæ ad Curvam educantur $CM$, $CN$, atque proprietas quæpiam has rectas reſpiciens fuerit propoſita: conveniet a modo hactenus uſitato naturam Curvarum per Coordinatas exprimendi, ita recedere, ut iſtæ rectæ in æquationem introducantur.

TAB. XX. Fig. 81.

392. Cum igitur pluribus aliis modis naturæ Linearum æquationibus comprehendi queant, quæ inter duas variabiles formentur, in præſenti negotio quantitas rectæ $CM$ ex dato puncto $C$ ad Curvam eductæ alterius variabilis locum ſuſtineat. Tum vero alia opus erit variabili, qua ſitus rectæ $CM$ definiatur; hunc in finem aſſumatur recta quæpiam $CA$ per punctum $C$ ducta pro Axe, atque angulus $ACM$, ſeu quantitas ab hoc angulo pendens, commodiſſime vicem alterius variabilis tenebit. Sit ergo recta $CM = z$, & angulus $ACM = \varphi$, cujus ſinus, tangenſve in æquationem ingrediatur; atque manifeſtum eſt, ſi detur æquatio quæcunque inter $z$ & *ſin.* $\varphi$, ſeu *tang.* $\varphi$, per eam Curvæ $AMN$ naturam determinari, pro quovis enim angulo $ACM$, definitur longitudo rectæ $CM$, ſicque punctum Curvæ $M$ determinatur.

393. Diligentius autem perpendamus hunc Lineas curvas exprimendi modum. Ac primo quidem æquetur diſtantia $z$ Functioni cuicunque ſinus anguli $\varphi$; quæ Functio ſi fuerit uni-

Digitized by Google

formis: videatur recta $CM$ Curvæ in unico puncto $M$ occurrere, quia angulo $ACM = \varphi$ unicus valor rectæ $CM$ reſpondet. Verum, ſi angulus $\varphi$ duobus rectis augeatur, eadem manebit rectæ $CM$ per punctum $C$ ductæ poſitio, hoc tantum diſcrimine quod in plagam oppoſitam dirigatur; ſicque alia ejuſdem rectæ $CM$ interſectio cum Curva prodibit, etiamſi $z$ æquetur Functioni uniformi ſinus anguli $\varphi$. Scilicet, ſit $P$ Functio illa ſinus anguli $\varphi$, ita ut ſit $z = P$, unde oriatur punctum Curvæ $M$; augeatur nunc angulus $\varphi$ duobus rectis, ſeu ejus ſinus ſtatuatur negativus, quo facto abeat $P$ in $Q$, ut ſit $z = Q$; hinc ergo prodibit nova interſectio ejuſdem rectæ $CM$ productæ cum Curva $m$, ſumendo $Cm = Q$. CAP. XVII. TAB. XX. Fig. 82.

394. Quamvis ergo $P$ ſit Functio uniformis ſinus anguli $\varphi$, tamen recta $CM$, ſub dato angulo $ACM = \varphi$, per punctum $C$ ducta, Curvæ in duobus punctis $M$ & $m$ occurret, niſi ſit $Q = -P$. Quod ſi ergo unaquæque recta $CM$ Curvæ in unico tantum puncto occurrere debeat, quantitatem illam $P$ Functionem eſſe oportet imparem ſinus anguli $\varphi$. Hoc idem autem uſu venit, ſi $P$ fuerit Functio impar coſinus anguli $\varphi$. Quam ob rem omnes Curvæ, quas ſingulæ rectæ ex $C$ eductæ in unico puncto interſecant, continebuntur in hac æquatione $z = P$; ſi quidem $P$ fuerit Functio impar cum ſinus tum coſinus anguli $ACM = \varphi$.

395. Cum igitur Curvæ, quæ a rectis ex puncto $C$ ductis in unico puncto ſecantur, contineantur in æquatione $z = P$, ſi $P$ fuerit Functio impar ſinus & coſinus anguli $\varphi$, ſeu ejuſmodi Functio, quæ valorem negativum induat, ſi tam ſinus quam coſinus anguli $\varphi$ ſtatuatur negativus, hinc facile pro hujuſmodi Curvis æquatio inter Coordinatas orthogonales reperiri poterit. Demiſſo enim ex puncto $M$ in Axem $CA$ perpendiculo $MP$, ſi dicatur $CP = x$, $PM = y$, erit $\frac{y}{z} = fin.\, \varphi$ & $\frac{x}{z} = coſ.\, \varphi$: unde, ſi $P$ fuerit Functio impar ipſarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$, omnes iſtæ Curvæ continebuntur in hac TAB. XX. Fig. 81.

LIB. II. æquatione $z = P$. A ſimpliciſſimis ergo incipiendo, erit

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y};$$

atque ad altiores poteſtates aſcendendo, erit

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y} + \frac{\epsilon x^3}{z^2} + \frac{\zeta x^2 y}{z^2} + \frac{\eta x y^2}{z^2} + \frac{\theta y^3}{z^2} + \frac{\iota x x}{y z} + \frac{\kappa y y}{x z} + \frac{\lambda y z}{x x} + \&c.$$

396. Si hæc æquatio per $z$ dividatur, ubique pares tantum ipſius $z$ occurrent poteſtates: ideoque, cum ſit $z = \surd(xx + yy)$, eliminando $z$ nulla irrationalitas in æquatione remanebit, prodibitque æquatio rationalis inter $x$ & $y$. Æquatio ergo generalis ita erit comparata, ut unitas, ſeu quantitas conſtans, æquetur Functioni $-1$ dimenſionum ipſarum $x$ & $y$. Cujuſmodi Functio ſi fuerit $P$, erit $C = P$; ideoque $\frac{1}{C} = \frac{1}{P}$; at $\frac{1}{P}$ erat Functio unius dimenſionis ipſarum $x$ & $y$; unde, ſi Functio quæcunque unius dimenſionis ipſarum $x$ & $y$ æquetur conſtanti, æquatio erit pro Curva, quam rectæ per punctum $C$ eductæ in unico puncto interſecant.

397. Sit $P$ Functio $n$ dimenſionum ipſarum $x$ & $y$; & $Q$ Functio $n+1$ dimenſionum; erit $\frac{Q}{P}$ Functio unius dimenſionis: ideoque omnes Curvæ, quas hic contemplamur, continebuntur in æquatione $\frac{Q}{P} = c$, ſeu $Q = cP$. Denotante ergo $n$ numerum quemcunque, æquatio generalis pro his Curvis erit

$$\alpha x^{n+1} + \beta x^n y + \gamma x^{n-1} y^2 + \delta x^{n-2} y^3 + \epsilon x^{n-3} y^4 + \&c.$$
$$= c(Ax^n + Bx^{n-1} y + Cx^{n-2} y^2 + Dx^{n-3} y^3 + \&c.)$$

Ex qua Lineæ ſingulorum ordinum, quæ a rectis ex puncto $C$

eductis in unico tantum puncto ſecantur in ſequentibus æquationibus continebuntur. CAP. XVII.

I.

$$\alpha x + \beta y = c$$

II.

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma yy = c(Ax + By)$$

III.

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3 = c(Ax^2 + Bxy + Cyy)$$

IV.

$$\alpha x^4 + \beta x^3 y + \gamma x^2 y^2 + \delta xy^3 + \epsilon y^4 = c(Ax^3 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^3)$$

&c.

398. Primum ergo Linea recta ſatisfacit, quam utique conſtat ab aliis Lineis rectis per datum punctum ductis non niſi in uno puncto ſecari poſſe. Secunda æquatio eſt pro Sectionibus conicis generalis, dummodo Sectio conica per ipſum punctum $C$ tranſeat, quæ interſectio, cum omnibus rectis ex $C$ eductis communis ſit, non computatur; quoniam ergo Sectiones conicæ a recta quacunque nonniſi in duobus punctis ſecari poſſunt, omnis recta per punctum $C$ in ipſa Curva utcumque ſumtum tranſiens unicam tantum præbebit interſectionem. Lineæ autem curvæ ſequentium ordinum omnes per ipſum punctum $C$ tranſeunt, quæ interſectio omnibus rectis per $C$ ductis communis pariter non computatur. Atque idcirco ex altioribus ordinibus in æquationibus exhibitis eæ tantum continentur, quas rectæ per $C$ ductæ in unico puncto interſecant. Sic igitur omnes enumeravimus Curvas algebraïcas, quæ a rectis per datum punctum $C$ ductis nonniſi in unico puncto trajiciuntur.

399. Progrediamur jam ad eas Curvas inveſtigandas quas ſingulæ rectæ per punctum $C$ ductæ vel in duobus punctis interſecant, vel nuſquam; ſi quidem radices æquationis duplicem interſectionem indicantis fiant imaginariæ. Cum igitur pro quovis angulo $ACM = \varphi$, recta $CM = z$ duplicem ſortiatur valorem, ea per æquationem quadraticam definietur. Sit

LIB. II. itaque $zz - Pz + Q = 0$ : ubi $P$ & $Q$ ſint Functiones anguli $\varphi$ ſeu ejus ſinus coſinuſve. Quoniam vero recta $CM$ Curvam nonniſi in duobus punctis $M$ & $N$ ſecare debet, non ſolum $P$ & $Q$ Functiones uniformes anguli $\varphi$ eſſe oportet, ſed etiam aucto angulo $\varphi$ duobus rectis nullæ novæ interſectiones oriri debent : id quod evenit ſi $P$ fuerit Functio impar ſinus & coſinus anguli $\varphi$, ita ut valorem induat negativum, ſi ſinus & coſinus negative accipiantur : $Q$ autem eſſe debet Functio par ejuſdem ſinus & coſinus.

400. Poſitis autem Coordinatis orthogonalibus $CP = x$, & $PM = y$; erit $\frac{y}{z} = \text{ſin}.\varphi$, & $\frac{x}{z} = \text{coſ}.\varphi$; ideoque $P$ debebit eſſe Functio impar ipſarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$; & $Q$ Functio par ipſarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$. Ex his colligitur fore $\frac{P}{z}$ Functio rationalis ipſarum $x$ & $y$, atque adeo Functio homogenea $-1$ dimenſionum. Simili modo erit $\frac{Q}{zz}$ Functio rationalis ipſarum $x$ & $y$ homogenea $-2$ dimenſionum. Quod ſi ergo fuerit $L$ Functio homogenea $(n+2)$ dimenſionum, $M$ Functio homogenea $(n+1)$ dimenſionum, atque $N$ Functio homogenea $n$ dimenſionum quæcunque ipſarum $x$ & $y$, fractio $\frac{M}{L}$ exhibebit Functionem convenientem pro $\frac{P}{z}$, & $\frac{N}{L}$ Functionem convenientem pro $\frac{Q}{zz}$. Quare, cum ſit $zz - Pz + Q = 0$, erit $1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{zz} = 0$ : unde æquatio generalis pro Curvis, quæ a rectis per punctum $C$ ductis in duobus punctis ſecantur, erit $1 - \frac{M}{L} + \frac{N}{L} = 0$, ſeu $L - M + N = 0$; ubi eſt $P = \frac{Mz}{L}$ & $Q = \frac{Nzz}{L} = \frac{N(xx+yy)}{L}$; eritque adeo $P$ Functio irrationalis ipſarum $x$ & $y$, ob $z = \sqrt{(xx+yy)}$, & $Q$ eſt Functio rationalis nullius dimenſionis.

401. Hinc

Digitized by Google

401. Hinc jam facile erit ex quovis Linearum ordine eas exhibere, quæ a rectis per datum punctum $C$ ductis in duobus punctis vel nuſquam interſecentur. Pro ſecundo ſcilicet ordine fiat $n = 0$, ac prodibit æquatio generaliſſima Sectionum conicarum.

$$\alpha xx + \beta xy + \gamma yy - \delta x - \epsilon y + \zeta = 0.$$

Puncto ergo $C$ ſumto ubicunque, omnis recta per id ducta Sectionem conicam vel in duobus punctis vel nuſquam interſecabit. Interim tamen fieri poteſt, ut unaquæpiam recta Curvam in uno tantum puncto interſecet; quod, cum inter infinitas illas rectas per $C$ ductas vel uni vel duabus tantum uſuveniat, hac exceptio nullius erit momenti: quin etiam ita hoc paradoxon explicari poteſt, ut altera interſectio in infinitum abeat; quam ob cauſam iſta exceptio noſtro aſſerto nullam vim inferre cenſenda eſt.

402. Quo autem pateat quibus caſibus iſta exceptio locum habeat æquationem inter $x$ & $y$ reducamus ad æquationem inter $z$ & angulum $ACM = \varphi$; quæ, ob $y = z.\,\mathit{ſin.}\,\varphi$, & $x = z.\,\mathit{coſ.}\,\varphi$, abibit in hanc

$$z^2 (\alpha (\mathit{coſ.}\varphi)^2 + \beta.\,\mathit{ſin.}\,\varphi.\,\mathit{coſ.}\,\varphi + \gamma (\mathit{ſin.}\,\varphi)^2) - z(\delta.\,\mathit{coſ.}\,\varphi + \epsilon.\,\mathit{ſin.}\,\varphi) + \zeta = 0:$$

ex qua patet, ſi fuerit coëfficiens ipſius $z^2$ æqualis nihilo, unicam tantum interſectionem locum habere; quod ergo evenit ſi fuerit $\alpha + \beta.\,\mathit{tang.}\,\varphi + \gamma\,(\mathit{tang.}\,\varphi)^2 = 0$. Quod ſi ergo hæc æquatio duas habeat radices reales, duobus caſibus recta per $C$ educta Curvam in unico tantum puncto ſecabit. Quoniam vero ejuſdem æquationis radices indicant Aſymtotas Curvæ, perſpicuum eſt Hyperbolas a rectis alteri Aſymtotæ parallelis in unico tantum puncto ſecari, cujuſmodi rectæ per punctum $C$ tranſeuntes duæ tantum dantur. In Parabola vero unica recta Axi parallela hanc exceptionem patietur. Verum ſi Sectio conica fuerit Ellipſis, ubicunque aſſumatur punctum



Digitized by Google

 *C*, omnis recta per id ducta Curvam vel nuſquam vel in duobus punctis ſecabit.

403. Lineæ tertii ordinis iſta proprietate gaudentes, poſito $n = 1$, continebuntur in hac æquatione

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 - \varepsilon x^2 - \zeta x y - \eta y^2 + \theta x + \iota y = 0,$$

quæ quidem in ſe complectitur omnes Lineas tertii ordinis, quæ ergo omnes huc pertinent, dummodo punctum *C* in ipſa Curva capiatur. Facto enim $x = 0$, ſimul $y$ valorem obtinet evaneſcentem. Simili modo pro Curvis quarti ordinis quæſito ſatisfacientibus punctum *C* non ſolum in Curva ſed ſimul ejus punctum duplex eſſe debet; omnis ergo Linea quarti ordinis puncto duplici prædita quæſito ſatisfaciet, dummodo punctum *C* in puncto duplici ſtatuatur. Sin autem *C* fuerit adeo Curvæ punctum triplex, tum omnis recta per id ducta Curvam in unico puncto interſecabit, pertinebitque ad caſum primo conſideratum. Pari modo Lineæ quinti ordinis ſatisfacient, ſi punctum *C* in earum puncto triplici ſtatuatur, atque ita porro. Perpetuo autem notandum eſt, ſi recta per *C* ducta parallela fiat alicui Aſymtotæ rectæ, ſeu Axi Aſymtotæ parabolicæ, tum ſemper unicam dari interſectionem, ultera in infinitum abeunte.

404. Egregie hæc conveniunt cum natura Linearum cujuſque ordinis: quia enim Linea cujuſque ordinis a Linea recta in tot punctis interſecari poteſt, quot exponens ordinis continet unitates, (atque revera in totidem punctis interſecatur, niſi aliquot interſectiones vel fiant imaginariæ vel in infinitum abeant:) & quia hic omnes interſectiones, ſive reales ſive in infinito factas ſive imaginarias, æque computamus, eaſque tantum excludimus quæ in ipſo puncto *C* fiunt; manifeſtum eſt cum Linea ordinis $n$ in $n$ punctis a quaque Linea recta ſecetur, punctum *C* in puncto totuplici, quot numerus $n - 2$ continet unitates, collocari debere, ut interſectio duplex prodeat.

Digitized by Google

405. His notatis facile erit problemata, quæ circa relationem inter quoſque binos ipſius $z$ valores $CM$ & $CN$ proponi ſolent, vel reſolvere, vel ſolutionis inconvenientiam oſtendere. Cum enim duo ipſius $z$ valores $CM$ & $CN$ ſint radices hujus æquationis $zz - Pz + Q = 0$, erit ipſorum ſumma $= P$, & rectangulum eorum $CM.CN = Q$. Quare, ſi primum requirantur ejuſmodi Curvæ, in quibus ubique ſit ſumma $CM + CN$ conſtans, Functionem $P$ quantitatem conſtantem eſſe oporteret. Cum autem ex quæſtionis natura unaquæque recta per $C$ ducta Curvæ in duobus tantum punctis occurrere debeat, neceſſe eſt ut ſit $P = \frac{Mz}{L} = \frac{M\surd(xx+yy)}{L}$ (§. 399), quæ quantitas irrationalitatem involvens nunquam conſtans eſſe poteſt. Atque idcirco nulla datur Curva huic quæſtioni proprie ſatisfaciens.

406. Quod ſi autem iſta conditio, qua duæ tantum cujuſque rectæ per $C$ ductæ interſectiones cum Curva poſtulantur, omittatur atque ejuſmodi quærantur Curvæ, quæ quidem plures duabus interſectiones exhibeant, inter eas autem duæ $M$ & $N$ ejuſmodi adſint, ut ſit $CM + CN$ quantitas conſtans, tales Curvæ innumerabiles exhiberi poterunt, ponendo $P =$ quantitati illi conſtanti $CM + CN = a$. Erit enim $zz - az + Q = 0$, denotante $Q$ Functionem $\frac{Nzz}{L}$; & quia hæc æquatio adhuc irrationalitate laborat, ea ſublata, erit $a^2 z^2 = (zz + Q)^2$, ſeu $a^2 = zz(1 + \frac{N}{L})^2$, ſeu $a^2 L^2 = (xx + yy)(L^2 + 2LN + NN)$, in qua erit $L$ Functio homogenea $n + 2$, at $N$ Functio homogenea $n$ dimenſionum ipſarum $x$ & $y$. Simpliciſſima ergo Curva hoc ſenſu quæſtionem reſolvens habebitur ſi ponatur $L = xx + yy$ & $N = \pm bb$, eritque $aa(xx + yy) = (xx + yy \pm bb)^2$, quæ eſt pro Linea quarti ordinis complexa; complectitur enim duos Circulos in $C$ concentricos. Curvæ autem continuæ ſimpliciſſimæ quæſito ſatisfacientes erunt ſexti ordinis, ponendo $L = \alpha xx + \beta xy +$

 $\gamma y^2$, & $N = \pm bb$, pro quibus æquatio erit $aa(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy)^2 = (xx + yy)(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy \pm bb)^2$. Sit $\alpha = 1$, $\beta = 0$, & $\gamma = 0$, erit $yy + xx = \frac{aax^4}{x^4 \pm 2bbxx + b^4}$, ſeu $y = \frac{x\sqrt{(aaxx - x^4 \mp 2bbxx - b^4)}}{xx \pm bb}$.

407. Sin autem hujuſmodi ſolutiones, quibus rectæ per $C$ ductæ Curvam in pluribus quam duobus punctis interſecant, excludantur, quam conditionem natura quæſtionis requirere videtur, nullæ prorſus Curvæ quæſtioni ſatisfacere ſunt dicendæ; ac propterea nulla dabitur Linea continua, quæ a rectis per $C$ ductis ita in duobus tantum punctis $M$ & $N$ interſecetur, ut ſumma $CM + CN$ ſit conſtans. At vero ſi iſtæ interſectiones hujus indolis poſtulentur, ut rectangulum $CM \times CN$ debeat eſſe conſtans, quæ proprietas in Circulum ita competit ut is ſatisfaciat ubicunque punctum $C$ capiatur, infinitæ aliæ Lineæ curvæ inveniri poterunt, quæ idem præſtent. Debebit enim $Q$ eſſe quantitas conſtans, æqualis ſcilicet illi rectangulo $CM.CN$, quod ſit $= aa$; quæ poſitio, cum ſit $Q = \frac{Nzz}{L}$, ac propterea Functio rationalis ipſarum $x$ & $y$, non pugnat.

408. Sit igitur $\frac{Nzz}{L} = aa$, ſeu $L = \frac{Nzz}{aa} = \frac{N(xx+yy)}{aa}$, atque Curvæ quæſito ſatisfacientes omnes continebuntur in hac æquatione $\frac{N(xx+yy)}{aa} - M + N = 0$, ſeu $Maa = N(xx + yy + aa)$, ubi $M$ denotat Functionem quamcunque homogeneam $n + 1$ dimenſionum, $N$ vero Functionem homogeneam $n$ dimenſionum ipſarum $x$ & $y$, ita ut ſit $\frac{M}{N} = \frac{xx+yy+aa}{aa}$ Functio unius dimenſionis ipſarum $x$ & $y$. Hæc ergo æquatio omnes complectitur Curvas, quæ a rectis per $C$ ductis in duobus tantum punctis $M$ & $N$ ita ſecantur, ut rectangulum $CM.CN$ ſit ubique conſtans $= aa$.

409. Cum igitur $\frac{M}{N}$ ſit Functio homogenea unius dimenſionis ipſarum $x$ & $y$, caſus ſimpliciſſimus prodibit ſi ponatur $\frac{M}{N} = \frac{\alpha x + \beta y}{a}$, ex quo orietur hæc æquatio $xx + yy - a(\alpha x + \beta y) + aa = 0$, quæ ſemper eſt pro Circulo: &, cum ſit æquatio pro Circulo generalis inter Coordinatas orthogonales, manifeſtum eſt Circulum quæſito ſatisfacere, ubicunque punctum $C$ accipiatur, omnino uti ex Elementis conſtat. Præter Circulum ergo ex Sectionibus conicis nulla alia Curva huic quæſtioni ſatisfacit. Verum ex ſingulis ordinibus Linearum ſequentibus infinita Linearum ſatisfacientium copia exhiberi poteſt: & quidem omnes, quæ ex quolibet ordine ſatisfaciunt. Sic Lineæ tertii ordinis, quæ iſtiac proprietate gaudent, continebuntur in hac æquatione

$$\frac{\alpha xx + \beta xy + \gamma yy}{a(\delta x + \varepsilon y)} = \frac{xx + yy + aa}{aa}$$

ſeu

$$(\delta x + \varepsilon y)(xx + yy) - a(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy) + aa(\delta x + \varepsilon y) = 0.$$

Atque ſimili modo ex omnibus ſequentibus Linearum ordinibus eæ, quæ ſatisfaciunt, exhibebuntur.

410. Propoſita jam ſit hæc quæſtio, ut inter omnes Lineas curvas, quæ a rectis per punctum $C$ ductis in duobus punctis ſecantur, eæ definiantur, in quibus ſit ſumma quadratorum $CM^2 + CN^2$ quantitas conſtans, puta $= aa$. Cum igitur ſit $CM + CN = P$, & $CM.CN = Q$, erit $CM^2 + CN^2 = PP - 2Q$; debebit ergo eſſe $PP - 2Q = 2aa$, ſeu $Q = \frac{PP - 2aa}{2}$. Quare, ob $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nzz}{L}$, erit $\frac{2Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} - 2aa$; ideoque $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz}$; quæ æquatio, cum ſit $L$ Functio $n+2$ dimenſionum, $M$ Functio $n+1$ dimenſionum, & $N$ Functio $n$ dimenſionum

LIB. II. ipſarum $x$ & $y$, nullam implicat difficultatem. Sumtis ergo pro $L$ & $M$ ejuſmodi Functionibus, erit $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz}$: unde pro Curvis quæſito ſatisfacientibus iſta reſultat æquatio generalis

$$L - M + \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz} = 0,$$

ſeu

$$2LL(xx+yy) - 2LM(xx+yy) + MM(xx+yy) - 2aaLL = 0:$$

quæ, ſi ſit $M = 0$, præbet Circulum cujus Centrum in $C$, quem quæſito ſatisfacere per ſe eſt perſpicuum.

411. Ponamus $n + 1 = 0$, ut ſit $M$ quantitas conſtans $= 2b$, & $L = \alpha x + \beta y$, atque orietur Linea quarti ordinis hac æquatione contenta

$$(\alpha x+\beta y)^2(xx+yy-aa) - 2b(\alpha x+\beta y)(xx+yy) + 2bb(xx+yy) = 0:$$

Alia æquatio quarti ordinis reperitur, ſi ponatur $L = xx + yy$ & $M = 2(\alpha x + \beta y)a$, tum enim æquatio per $2xx + 2yy$ diviſa dabit

$$(xx+yy)^2 - 2a(\alpha x+\beta y)(xx+yy) + 2aa(\alpha x+\beta y)^2 - aa(xx+yy) = 0.$$

Niſi autem diviſio per $xx + yy$ ſuccedat, æquatio inventa (ponendo $2M$ loco $M$), quæ eſt

$$LL(xx+yy) - 2LM(xx+yy) + 2MM(xx+yy) - aaLL = 0,$$

ſemper erit ordinis $2n + 6$, ideoque ex quolibet ordine pari obtinetur æquatio pro Curva ſatisfaciente. Præterea vero, ſi $L$ per $xx + yy$ fuerit diviſibilis, ſcilicet, ſi, denotante $N$ Functionem quamcunque homogeneam $n$ dimenſionum ipſarum $x$ & $y$, fuerit $L = (xx+yy)N$, orietur alia æquatio generalis hæc

$$NN(xx+yy)^2 - 2MN(xx+yy) + 2MM - aaNN(xx+yy) = 0,$$

quæ eſt ordinis $2n + 4$, ita ut ex ſingulis ordinibus paribus duplex naſcatur æquatio pro Curvis propoſita proprietate gau-

Digitized by Google

dentibus. Sic, ex ordine ſexto ſatisfacient Curvæ in his duabus æquationibus contentæ 

$$(\alpha xx+\beta xy+\gamma yy)^2(xx+yy-aa)-2a(\delta x+\epsilon y)(xx+yy)$$
$$(\alpha xx+\beta xy+\gamma yy-a(\delta x+\epsilon y))=0,$$

&

$$(\delta x+\epsilon y)^2(xx+yy)(xx+yy-aa)=$$
$$2a(\alpha xx+\beta xy+\gamma yy)((\delta x+\epsilon y)(xx+yy)-a(\alpha xx+\beta yy+\gamma yy)).$$

In nullo ergo Linearum ordine impari ulla datur Linea hanc quæſtionem reſolvens.

412. Si jam non quærantur ejuſmodi Curvæ, in quibus ſit ſumma quadratorum $CM^2+CN^2$ conſtans, ſed in quibus ſit $CM^2+CM.CN+CN^2$ vel generaliter $CM^2+n.CM\times CN+CN^2$ quantitas conſtans; problema ſimili modo reſolutionem admittet. Cum enim ſit $CM^2+n.CM.CN+CN^2=P^2+(n-2)\,Q$, ponatur $P^2+(n-2)\,Q=aa$, eritque $Q=\frac{aa-PP}{n-2}$, quæ æquatio nullo incommodo laborat. Cum igitur ſit $P=\frac{Mz}{L}$, & $Q=\frac{Nzz}{L}$, erit $\frac{M^2z^2}{L^2}+\frac{(n-2)\,Nzz}{L}=aa$; ideoque $N=\frac{aaL}{(n-2)\,zz}-\frac{M^2}{(n-2)\,L}$. Quare, cum æquatio pro Curva ſit $L-M+N=0$, habebitur pro hac proprietate, qua $CM^2+n.CM.CN+CN^2$ debet eſſe conſtantis magnitudinis $=aa$, iſta æquatio

$$(n-2)\,LLzz-(n-2)\,LMzz+aaLL-M^2zz=0$$

ſeu, ob $zz=xx+yy$, erit

$$aaLL+(xx+yy)((n-2)\,L^2-(n-2)\,LM-M^2)=0,$$

exiſtente $L$ Functione $m+2$, & $M$, $m+1$ dimenſionum ipſarum $x$ & $y$. Sit $N$ Functio quæcunque homogenea $m$ dimenſionum, ac ponatur $L=(xx+yy)\,N$, prodibit alia æquatio generalis hæc

$$aa(xx+yy)N^2+(n-2)(xx+yy)^2N^2-(n-2)(xx+yy)MN-M^2=0.$$

Digitized by Google

LIB. II. 413. Si ſtatuatur $n = 2$, ut ſit $(CM + CN)^2 = aa$, fiet; vel $aaLL = (xx = yy)MM$, vel $MM = aa(xx + yy)N^2$. Utraque autem æquatio cum ſit homogenea, continebit duas pluresve æquationes hujus formæ $\alpha y = \beta x$; ideoque quæſito ſatisfieri non poterit niſi duabus pluribusve rectis per punctum $C$ ductis, quæ autem cum eo ſenſu, quo quæſtio proponitur, non ſatisfaciant, perſpicuum eſt hoc problema nullam admittere ſolutionem, uti ſupra jam notavimus: deberet enim eſſe $CM + CN =$ conſtanti $a$. Quod ſi vero ſtatuatur $n = -2$, ita ut quadratum differentiæ $(CN - CM)^2$, ideoque ipſa differentia $MN$ deberet eſſe conſtans, orientur hæ duæ æquationes

$$aaLL = 4(xx + yy)(2L - M)^2$$

&

$$aa(xx + yy)NN = (2(xx + yy)N - M)^2$$

unde ſimpliciſſima ſolutio oritur, ſi ponatur $N = 1$ & $M = 2bx$; erit enim

$$aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2,$$

ſeu, poſito $aa = 8cc$ erit,

$$(xx + yy)^2 = 2(cc + bx)(xx + yy) - bbxx.$$

Ergo $xx + yy = cc + bx \pm c\sqrt{(cc + 2bx)}$,

atque

$$y = \sqrt{(cc + bx - xx \pm c\sqrt{(cc + 2bx)})}.$$

414. Dantur ergo innumerabiles Lineæ curvæ, quæ a rectis per punctum $C$ ductis ita in duobus punctis $M$ & $N$ ſecantur, ut intervallum $MN$ perpetuo ſit conſtans. Ac primo quidem, patet huic conditioni ſatisfacere Circulum in $C$ Centrum habentem, erit enim tum perpetuo intervallum $MN =$ Diametro Circuli; prodit autem Circulus ex æquationibus generalibus, ſi ponatur $M = 0$. Tum vero, poſt Circulum, ſatisfaciunt Lineæ quarti ordinis hac æquatione $aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2$, atque hac $aaxx = (xx + yy)(2x - 2b)^2$, contentæ; ad quarum formam cognoſcendam expediet ad æquationem

Digitized by Google

æquationem inter $z$ & ang. $\varphi$ regredi. Cum igitur ſit $xx + yy = zz$, & $x = z.\,coſ.\,\varphi$, & $y = z.\,ſin.\,\varphi$, poſito $a = 2c$, erit primo CAP. XVII.

$$cczz = (zz - bz.\,coſ.\,\varphi)^2$$

ſeu

$$b.\,coſ.\,\varphi \pm c = z.$$

tumque

$$cc\,(coſ.\,\varphi)^2 = (z.\,coſ.\,\varphi - b)^2$$

ſeu

$$z = \frac{b}{coſ.\,\varphi}$$

ex quibus facilis Curvarum conſtructio naſcitur.

415. Ad Curvam enim æquatione $z = b.\,coſ.\,\varphi \pm c$ contentam conſtruendam, per $C$ ducatur recta $ACB$, in qua ſumatur $CD = b$, & ex $D$ ſumatur utrinque $DA = DB = c$, erunt primo puncta $A$ & $B$ in Curva quæſita. Tum, ducta quavis recta $NCM$ per $C$, ex $D$ in eam demittatur perpendiculum $DL$, & ab $L$ utrinque ſumatur $LM = LN = c$, erunt puncta $M$ & $N$ in quæſita Curva; ideoque perpetuo intervallum $MN = 2c$, uti quæſtio poſtulat. TAB. XX. Fig. 83, 84, 85.

Hic notandum eſt, ſi fuerit $CD = b$ minor quam $c$, Curvam in $C$ habituram eſſe punctum conjugatum. Fig. 83.

Sin autem ſit $b = c$, Curva in $C$ Cuſpide erit prædita, evaneſcente intervallo $AC$. Fig. 84.

Denique, ſi ſit $b$ minor quam $c$, punctum $A$ inter $C$ & $B$ cadet, Curvaque in $C$ habebit nodum ſeu punctum duplex. Ceterum harum Curvarum Diameter erit recta $ACB$, & quæ huic normaliter inſiſtit $ECF$ erit $= 2c$. Fig. 85.

416. Præter has Curvas in ſe redeuntes ex Linearum ordine quarto, etiam ſatisfaciunt ex eodem ordine aliæ in infinitum excurrentes, quæ hac æquatione $z = \frac{b}{coſ.\,\varphi} \pm c$ continentur. Quarum conſtructio ita ſe habebit; ducta per $C$ recta principali $CAB$, ſumatur $CD = b$, capiaturque $DA = DB = c$; erunt puncta $A$ & $B$ in Curva. Deinde, per $D$ ducatur nor- TAB. XXI. Fig. 86.



Digitized by Google

LIB. II. malis $EDF$; & , acta recta quacunque $CL$, erit $CL = \frac{b}{cof. \varphi}$, vocato angulo $DCL = \varphi$. Tum perpetuo abſcindatur $LM = LN = c$, atque puncta $M$ & $N$ determinabunt Curvam quæſitam. Ex hac autem conſtructione perſpicuum eſt, Curvam ſic deſcriptam eſſe *Conchoidem* Veterum, polum $C$ habentem, & Aſymtotam rectam $EF$, ad quam quatuor Curvæ rami in infinitum convergunt. Vocatur autem portio $hBh$ *Conchois exterior*, & $gAg$ *interior*, præter quas partes in $C$ punctum exiſtit conjugatum.

417. Hæ Curvæ ex Linearum ordine quarto ſatisfaciunt. Facile autem erit Curvas altiorum ordinum quot libuerit exhibere. Quod ſi enim fuerit $P$ Functio impar ſinus & coſinus anguli $\varphi$, tum iſta æquatio $z = bP \pm c$ præbebit Curvam continuam, quam omnes rectæ per $C$ ductæ ita in duobus punctis $M$ & $N$ ſecabunt, ut intervallum $MN$ futurum ſit conſtans $= 2c$. Referri autem hæ Curvæ omnes poterunt ad genus Conchoidalium, loco rectæ $EF$ directricis ſubſtituendo Lineam quamcunque Curvam æquatione $z = bP$ contentam. Supra autem vidimus hanc æquationem in ſe complecti Lineas curvas, quæ a rectis per punctum $C$ ductis nonniſi in uno puncto ſecentur. Quare, ob intervallum $c$ arbitrarium, ex unaquaque Curva $z = bP$ innumerabiles Curvæ ad præſens inſtitutum accommodatæ deſcribi poterunt.

TAB. XXI. Fig. 87. 418. Sumatur ſcilicet pro lubitu Curva $CEDLF$, quæ ab omnibus rectis per punctum $C$ ductis in unicis tantum punctis $D$, $L$, ſecetur. Tum in his ſingulis rectis $CL$ productis utrinque ab $L$ capiantur intervalla æqualia $LM = LN = c$; eruntque puncta $M$ & $N$ in Curva quæſita. Sic igitur motu continuo deſcribi poterit Curva $AMPCQBNRC$, quæ a ſingulis rectis per $C$ ductis in binis punctis $M$ & $N$ ita interſecabitur, ut intervallum $MN$ ſit perpetuo conſtans $= 2c$. Ubi notandum eſt, ſi Curva $CEDF$ fuerit Circulus per punctum $C$ ductus, tum Curvam deſcriptam fore eandem Lineam quarti ordinis, quam primo invenimus §. 414.

Digitized by Google

419. Sic igitur ſatisfecimus quæſtioni, qua quærebantur Lineæ curvæ $AMN$ a rectis per punctum $C$ ductis ita ſecandæ in duobus punctis $M$ & $N$, ut eſſet $CN - CM$ ſeu $CM^2 - 2CM \cdot CN + CN^2$ perpetuo quantitas conſtans. Paucis igitur adhuc evolvamus caſum, quo $CM^2 + CM \cdot CN + CN^2$ debet eſſe quantitas conſtans. In §. 412. ergo poni debet $n = 1$, ſicque naſcetur vel iſta æquatio CAP. XVII. TAB. XX. Fig. 81.

$$aaLL = (xx + yy)(L^2 - LM + M^2)$$

exiſtente $L$ Functione $m + 1$, & $M$ Functione $m$ dimenſionum ipſarum $x$ & $y$. Vel orietur hæc altera æquatio

$$aa(xx + yy)NN = (xx + yy)^2 NN - (xx + yy)MN + MM$$

in qua $M$ eſt Functio homogenea una dimenſione ſuperior ipſarum $x$ & $y$, quam Functio $N$.

420. Primum quidem perſpicuum eſt, ſi ponatur $M = 0$, prodire Circulum, cujus Centrum in puncto $C$ ſit conſtitutum; qui, cum omnes rectæ ex $C$ ad Curvam ductæ ſint æquales, etiam omnibus hujus generis quæſtionibus ſatisfacit. Pro præſenti autem caſu poſt Circulum Curvæ ſimpliciſſimæ prodibunt, ſi in priori æquatione ponatur $M = b$ & $L = x$, eritque

$$aaxx = (xx + yy)(xx - bx + bb)$$

ſive

$$yy = \frac{xx(aa - bb + bx - xx)}{bb - bx + xx}.$$

Quod ſi autem in altera æquatione ponatur $N = 1$, & $M = bx$, habebitur quoque Linea quarti ordinis

$$aa(xx + yy) = (xx + yy)^2 - bx(xx + yy) + bbxx,$$

ſeu

$$xx + yy = \tfrac{1}{2}bx + \tfrac{1}{2}aa \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^4 + \tfrac{1}{2}aabx - \tfrac{3}{4}bbxx\right)}$$

quæ pariter, ac prior, quæſtioni ſatisfaciet.

Ff 2

LIB. II.

421. His expeditis quæſtionibus, conſideremus altiores poteſtates binorum ipſius $z$ valorum ex æquatione $zz - Pz + Q = 0$, exiſtente $P = \frac{Mz}{L}$ & $Q = \frac{Nzz}{L}$: ubi $L$ Functionem homogeneam $n + 2$; $M$, $n + 1$ & $N$, $n$ dimenſionum ipſarum $x$ & $y$ ſignificat; eſtque $x =$ Abſciſſæ $CP$ & $y =$ Applicatæ $PM$. Propoſita igitur ſit quæſtio, qua binæ interſectiones $M$ & $N$ ejus indolis requiruntur, ut ſit $CM^3 + CN^3 = a^3$. Cum ergo ſit, ex æquationis $zz - Pz + Q = 0$, natura, $CM^3 + CN^3 = P^3 - 3PQ$ debebit eſſe $P^3 - 3PQ = a^3$: quæ æquatio, cum $P^3$ & $PQ$ ſint quantitates irrationales, locum habere nequit. Huic ergo quæſtioni in ſtricto ſenſu prorſus ſatisfieri non poteſt: ſin autem numerus interſectionum non ſpectetur etiamſi duabus plures prodeant, tum quidem infinitis modis Curvæ ſatisfacientes inveniri poſſunt, ponendo $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$, & pro $P$ capiendo Functionem quamcunque ſinus & coſinus anguli $ACM = \varphi$.

422. Sin autem ejuſmodi Curvæ requirantur, in quibus ſit $CM^4 + CN^4 = a^4$, tum poni debebit $P^4 = 4P^2Q + 2QQ = a^4$; quæ æquatio, cum nulla inſit irrationalitas, nullam involvit contradictionem. Debebit ergo eſſe $Q = PP + \sqrt{(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)}$, quæ Functio, non obſtante ſigno radicali, tanquam uniformis ſpectari poteſt, quia ſi $\sqrt{(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)}$ ſumeretur negative, pro $z$ valores imaginarii reſultarent. Erit ergo $\frac{Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} + \sqrt{(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4)}$; &, cum pro Curva ſit $L - M + N = 0$, ſeu $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{Nzz}{L} = 0$, erit $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{MMzz}{LL} + \sqrt{(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4)} = 0$. Conſequenter, ſublata irrationalitate, erit

$$\frac{z^4}{L^4}(LL - LM + MM)^2 = \frac{M^4 z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4,$$

ſeu

$$(xx + yy)^2 (2(LL - LM + MM)^2 - M^4) = a^4 L^4,$$

quæ omnes Curvas ſatisfacientes in ſe complectitur.

423. Alio faciliori modo, uti ſupra §. 372, hæc & ſimiles quæſtiones reſolvi poterunt. Cum enim ſit $CM \cdot CN = Q$, ſi altera ipſarum $CM$ & $CN$ dicatur $= z$, erit altera $= \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$, ob $Q = \frac{Nzz}{L}$. Quare, ſi debeat eſſe $CM^n + CN^n = a^n$; fiet $z^n + \frac{N^n z^n}{L^n} = a^n$; ideoque $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$: quæ æquatio, ſi fuerit $n$ numerus par, jam eſt rationalis quæſitoque ſatisfaciet. At, ſi ſit $n$ numerus impar, ad irrationalitatem tollendam quadrata ſumi debent; quo fit, ut numerus interſectionum duplicetur, ſicque Curva oriatur non eo ſenſu ſatisfaciens uti deſideratur. Sic, ſi debeat eſſe $CM^2 + CN^2 = a^2$, fiet $zz = xx + yy = \frac{aaLL}{LL + NN}$; quæ convenit cum ſupra inventa $xx + yy = \frac{aaLL}{(L - M)^2 + L^2}$ (410), ob $L - M + N = 0$. Generaliter ergo, ſi debeat eſſe $CM^n + CN^n = a^n$ fueritque $n$ numerus par, obtinebitur iſta æquatio $z^n = (xx + yy)^{\frac{n}{2}} = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n} = \frac{a^n L^n}{L^n + (L - M)^n}$, exiſtentibus $L$ Functione $m + 2$ dimenſionum, $M$ Functione $m + 1$ dimenſionum, & $N$ Functione $m$ dimenſionum ipſarum $x$ & $y$.

424. Hæc eadem ſolutio etiam ex conſideratione ſummæ $CM + CN = P$, eruitur. Si enim altera ipſarum $CM$ &

 $CN$ ponatur $= z$, erit altera $= P - z$. Hinc, ſi $CM^n +$ $CN^n$ debeat eſſe conſtans, erit $z^n + (P - z)^n = a^n$. Vidimus autem eſſe debere $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nzz}{L}$; ita ut ſit $L - M + N = 0$; ex quo erit $z^n + \frac{z^n(M-L)^n}{L^n} = a^n$; ſeu $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + (M-L)^n}$, vel $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$: vel, eliminando $L$, erit $z^n = \frac{a^n(M-N)^n}{(M-N)^n + N^n}$. Hæ æquationes, ſi fuerit $n$ numerus par, conditionem propoſitam adæquate adimplent. At, ſi $n$ ſit numerus impar, dabuntur quidem duæ interſectiones $M$ & $N$, ut ſit $CM^n + CN^n = a^n$; at præter has habebuntur duæ aliæ interſectiones eadem proprietate gaudentes, ita ut quælibet recta per $C$ ducta bis proprietatem propoſitam involvat.

425. His expoſitis, facile erit quæſtiones alias maxime difficiles reſolvere: debeat enim Curva inveniri quæ ab omnibus rectis per $C$ ductis ita in duobus punctis $M$ & $N$ ſecetur, ut ſit $CM^n + CN^n + \alpha CM.CN(CM^{n-2} + CN^{n-2}) + \beta.CM^2.CN^2(CM^{n-4} + CN^{n-4})$ &c. quantitas conſtans $= a^n$. Ponatur alter valor $CM = z$, erit alter $CN = \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$; quibus valoribus ſubſtitutis orietur iſta æquatio, qua natura Curvæ exprimitur, $z^n(L^n + N^n + \alpha LN(L^{n-2} + N^{n-2}) + \beta L^2 N^2(L^{n-4} + N^{n-4}) + \&c.)$

$= a^n L^n$. Eſt autem $L - M + N = o$, atque $L$, $M$, & $N$ ſunt Functiones homogeneæ ipſarum $x$ & $y$ dimenſionum $m + 2$, $m + 1$ & $m$, uti ſupra deſcripſimus: unde erit, vel $L = M - N$, vel $N = M - L$ ſicque infinitæ ſolutiones hinc deducentur.

426. Pergamus jam ad Curvas inveſtigandas, quæ a ſingulis rectis per punctum fixum $C$ ductis in tribus punctis ſecentur. Hujuſmodi ergo Curvarum natura exprimetur hac æquatione generali

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = o:$$

ubi $z$ denotat diſtantiam cujuſque Curvæ puncti a $C$; & $P$, $Q$, $R$ ſunt Functiones anguli $ACM = \varphi$, ejuſve ſinus & coſinus. Per eaſdem autem rationes quas ſupra allegavimus apparet, ne plures quam tres interſectiones prodeant, $P$ & $R$ eſſe debere Functiones impares ipſius $ſin. \varphi$ & $coſ. \varphi$; verum $Q$ ſtatui debere Functionem parem. Quod ſi ergo ponantur Coordinatæ orthogonales $CP = x$, $PM = y$, ut ſit $xx + yy = zz$, atque denotent $K$, $L$, $M$, & $N$ Functiones homogeneas $(n + 3)$, $(n + 2)$, $(n + 1)$ & $n$ dimenſionum ipſarum $x$ & $y$, fore $P = \frac{Lz}{K}$, $Q = \frac{Mzz}{K}$, & $R = \frac{Nz^3}{K}$: ideoque inter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$ habebitur pro hujuſmodi Curvis iſta æquatio generalis

$$K - L + M - N = o;$$

ex qua patet punctum $C$ fore Curvæ punctum totuplex quot index $n$ contineat unitates.

427. Primum ergo, huc pertinent omnes Lineæ tertii ordinis, ubicunque punctum $C$ extra Curvam capiatur. Deinde, in hac æquatione continentur omnes Lineæ quarti ordinis, dummodo punctum $C$ in ipſa Curva accipiatur. Tertio, omnes Lineæ quinti ordinis, in quibus datur punctum duplex huc referuntur, ſi modo punctum $C$ in earum puncto duplici conſ-

LIB. II. ſituatur. Similique modo Lineæ altiorum ordinum hanc conditionem implebunt, ſi habeantur puncta multiplicia tanti exponentis, quot $n$ contineat unitates, ſi $n+3$ exponat ordinem, ad quem æquatio pertineat.

428. Sint $p$, $q$, $r$ tres illi valores ipſius $z$, quos obtinet ex æquatione $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$, pro quovis valore anguli $CAM = \varphi$; eritque, ex natura æquationum $P = p+q+r$; $Q = pq+pr+qr$ & $R = pqr$. Cum jam $P$ & $R$ per $x$ & $y$ rationaliter exprimi nequeant, manifeſtum eſt ejuſmodi Curvas exhiberi non poſſe, in quibus ſit vel $p+q+r$ vel $pqr$ quantitas conſtans, neque adeo ulla Functio impar ipſarum $p$, $q$, & $r$, conſtanti æqualis poni poterit. Pares autem Functiones ſine ulla difficultate conſtantem valorem obtinere poterunt. Sic, ſi requiratur ut ſit $pq+pr+qr = aa$, erit $Q = \frac{Mzz}{K} = aa$: ideoque $M(xx+yy) = aaK$; qui valor in æquatione $K - L + M - N = 0$, ſubſtitutus, dabit æquationem generalem omnes Curvas hac proprietate præditas in ſe complectentem:

$$M(xx+yy) - aaL + aaM - aaN = 0;$$

vel, eliminando $M$, hanc

$$(xx+yy)K - (xx+yy)L + aaK - (xx+yy)N = 0.$$

429. Pari modo, aliæ ſimiles quæſtiones facile reſolventur. Uti, quæratur Curva, quæ a rectis per $C$ ductis ita in tribus punctis ſecetur, ut ſit $p^2+q^2+r^2 = a^2$. Cum enim ſit $p^2+q^2+r^2 = P^2 - 2Q$ & $P = \frac{Lz}{K}$ atque $Q = \frac{Mzz}{K}$, fiet $\frac{LLzz}{KK} - \frac{2Mzz}{K} = aa$, ſeu $(xx+yy)LL - 2(xx+yy)KM = aaKK$. At, pro Curvis tres interſectiones admittentibus habetur hæc æquatio generalis $K - L + M - N = 0$, cujus natura in hoc conſiſtit ut maximus ipſarum $x$ & $y$ dimenſionum numerus

numerus ternario ſuperet minimum. Quo igitur hujuſmodi obtineatur æquatio, ſimulque ſit $(xx+yy)L^2 - 2(xx+yy)KM = aaKK$, multiplicetur illa æquatio per $2(xx+yy)K$, ut eliminari poſſit $M$, atque prodibit hæc æquatio generalis caſui propoſito ſatisfaciens CAP. XVII.

$$2(xx+yy)KK - 2(xx+yy)KL + (xx+yy)L^2 - aaKK - 2(xx+yy)KN = 0.$$

Membrum enim, in quo plurimæ inſunt dimenſiones, eſt $2(xx+yy)KK$, continetque $2n+8$ dimenſiones ipſarum $x$ & $y$; atque membrum infimum eſt $2(xx+yy)KN$, & continet $2n+5$ dimenſiones, uti natura rei poſtulat.

430. Quoniam ergo neque ſummum neque imum membrum evaneſcere poteſt, ponamus, ad Curvam ſimpliciſſimam inveniendam, $n=0$; ſitque $N=b^3$, $K=x(xx+yy)$, & $L=0$, atque prodibit hæc æquatio

$$2(xx+yy)^3x^2 - aaxx(xx+yy)^2 - 2b^3x(xx+yy)^2 = 0,$$

quæ per $2x(xx+yy)^2$ diviſa præbet hanc

$$x(xx+yy) - \tfrac{1}{2}aax - b^3 = 0,$$

quæ pertinet ad ordinem tertium. Sin autem non ſit $L=0$, ſed $L=2c(xx+yy)$, prodibit æquatio ordinis quarti

$$xx(xx+yy) - 2cx(xx+yy) + 2cc(xx+yy) - \tfrac{1}{2}aaxx - b^3x = 0,$$

ſeu

$$xx(xx+yy) + (2c-x)^2(xx+yy) = aaxx + 2b^3x.$$

Simili autem modo ex altioribus ordinibus plurimæ aliæ Curvæ quæſtioni ſatisfacientes eruentur.

431. Deinde, etiam Curvæ inveniri poterunt eæ in quibus ſit $p^4+q^4+r^4$ quantitas conſtans. Cum enim ſit $p^4+q^4+r^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR$, poni debebit $P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR = c^4$.

Erit ergo

$$2^4(L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2 + 4K^3LN) = c^4K^4:$$

ideoque

$$4K^3LNz^4 - c^4K^4 - z^4(L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2),$$

 unde valor ipſius $N$ in æquatione $K - L + M - N = 0$, ſubſtitutus dabit æquationem generalem pro Curvis huic conditioni ſatisfacientibus.

432. Poterit autem ſimul & huic conditioni $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$, & præcedenti $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$ ſatisfieri. Per hanc enim eſſe debet $zzL^2 - 2zzKM = aaKK$; unde fit $2zzKM = zzL^2 - aaKK$.

Deinde, cum ſit

$$4K^3LNz^4 = c^4K^4 - L^4z^4 + 4KL^2Mz^4 - 2K^2M^2z^4$$

erit

$$4K^3LNz^4 = c^4K^4 + L^4z^4 - 2aaK^2L^2z^2 - 2K^2M^2z^4$$

&

$$4K^3LMz^4 = 2KL^3z^4 - 2aaK^3Lzz.$$

Subſtituantur hi valores loco $M$ & $N$ in æquatione $K - L + M - N = 0$, ſeu $4K^3Lz^4 - 4K^3L^2z^4 + 4K^3LMz^4 - 4K^3LNz^4 = 0$, atque prodibit hæc æquatio pro Curva

$$4K^3Lz^4 - 4K^3L^2z^4 + 2KL^3z^4 - 2a^2K^3Lzz - c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2zz + 2K^2M^2z^4 = 0.$$

At, ob

$$KMzz = \tfrac{1}{2}L^2zz - \tfrac{1}{2}aaKK$$

erit

$$2K^2M^2z^4 = \tfrac{1}{2}L^4z^4 - aaK^2L^2zz + \tfrac{1}{2}a^4K^4,$$

ideoque pro Curvis quæſitis habebitur hæc æquatio generalis

$$8K^3Lz^4 - 8K^3L^2z^4 + 4KL^3z^4 - 4a^2K^3Lzz - 2c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L\ zz + a^4K^4 = 0.$$

433. Quia $K$ debet eſſe Functio homogenea ipſarum $x$ & $y$ una dimenſione altior quam $L$, Curva ſimpliciſſima in qua tres interſectiones exhibeant ſimul $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$, & $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$ prodibit, ſi ponatur $K = zz$, & $L = bx$; erit ergo

Digitized by Google

$$8bxz^6 - 8bbxxz^4 + 4b^3x^3z^2 - 4a^2bxz^4 - 2c^4z^4 - b^4x^4 + 2q^2b^2x^2z^2 + a^4z^4 = 0,$$

quæ, ob $zz = xx + yy$, eſt rationalis præbetque Lineam ordinis ſeptimi, cujus $C$ eſt punctum quadruplex. Alia autem Linea ſeptimi ordinis ſatisfaciens obtinebitur, ſi ponatur $K = x$, & $L = b$; erit enim

$$8bx^3z^4 - 8bbxxz^4 + 4b^3xz^4 - 4aabx^3zz - 2c^4x^4 - b^4z^4 + 2aabbxxzz + a^4x^4 = 0,$$

ſeu

$$z^4 = \frac{4aabx^3zz - 2aabbxxzz + 2c^4x^4 - a^4x^4}{8bx^3 - 8bbxx + 4b^3x - b^4}.$$

Unde fit

$$zz = \frac{2aabx^3 - aabbxx \pm xx\sqrt{(2bx-bb)(2c^4(bb-2bx+4xx)-2a^4(bb-2bx+2xx))}}{b(2x-b)(4xx-2bx+bb)}.$$

434. Jam ulterius progredi liceret ad Curvas, quæ a rectis per punctum $C$ ductis in quatuor punctis interſecentur; atque ex iis illæ inveniri poſſent, quæ datis proprietatibus ſint prædıtæ. Verum, ſi ad præcepta in præcedentibus tradita attendamus, nulla prorſus ſupererit difficultas, omniaque, quæ in hoc genere deſiderari poterunt, ſine nullo fere labore vel expedientur, vel, niſi quæſtio ſolutionem genuinam admittat, hoc ipſum ſtatim cognoſcetur. Quam ob rem huic materiæ amplius non immorabor, ad aliud argumentum ad cognitionem Linearum curvarum pertinens progreſſurus.

## CAPUT XVIII.

*De Similitudine & Affinitate Linearum curvarum.*

435. In omni æquatione pro Linea curva, præter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$, ineſſe debent quantitates conſtantes, vel una vel plures, uti $a$, $b$, $c$, &c.; quibus Lineæ conſtantes deſignantur, & quæ cum variabilibus $x$ & $y$ ubique eundem Linearum dimenſionum numerum, conſtituunt.: Si enim in uno termino extet productum ex $n$ Lineis in ſe invicem multiplicatis, neceſſe eſt ut in ſingulis reliquis terminis totidem Lineæ in ſe invicem multiplicentur, quoniam alias quantitates heterogeneæ inter ſe comparari deberent, quod fieri non poteſt. Quocirca in omni æquatione pro Linea curva Lineæ conſtantes $a$, $b$, $c$, &c., cum variabilibus $x$ & $y$ ubique eundem dimenſionum numerum conſtituent, niſi forte Linea quæpiam conſtans unitate vel alio numero abſoluto exprimatur. Hoc igitur notato, ſi nullæ Lineæ conſtantes in æquatione ineſſent, tum variabiles $x$ & $y$ ſolæ ubique eundem dimenſionum numerum adimplerent, ideoque Functionem homogeneam conſtituerent. Supra autem jam vidimus hujuſmodi æquationem ad Lineam curvam non pertinere, ſed aliquot rectas ſe invicem in eodem puncto interſecantes exhibere.

436. Contemplemur igitur æquationem in qua, præter binas variabiles $x$ & $y$, unica inſit Linea conſtans $a$; ita ut tres Lineæ $a$, $x$, & $y$ ubique in æquatione eundem dimenſionum numerum conſtituant. Hujuſmodi ergo æquatio, prout Lineæ conſtanti $a$ alii atque alii valores tribuantur, infinitas producet Lineas curvas, quæ tantum quantitate a ſe invicem diſcreparent, ceterum vero omnino ſimiles inter ſe ſint futuræ. Omnes ergo Lineæ curvæ, quæ hoc modo in eadem æquatione comprehenduntur, merito ad idem genus referuntur atque inter ſe

ſimiles eſſe cenſentur, neque aliud in illis deprehendetur diſcrimen, niſi quod in Circulis diverſæ magnitudinis ineſſe intelligitur. CAP. XVIII.

437. Quo hæc ſimilitudo melius percipiatur, conſideremus æquationem determinatam, præter variabiles $x$ & $y$, unicam Lineam conſtantem $a$, quam *Parametrum* vocare liceat, continentem, hanc

$$y^3 - 2x^3 + ayy - aax + 2aay = 0.$$

Sit $AC$ valor Parametri $a$; atque, exiſtente $AC = a$, ſit $AMB$ Linea curva hac æquatione contenta, ſumta recta $AB$ pro Axe, vocatiſque Coordinatis $AP = x$ & $PM = y$. Tribuatur jam Parametro $a$ quicunque alius valor $ac = a$, ſitque $amb$ Linea curva, quam nunc illa æquatio præbet, eruntque hæ Lineæ curvæ $AMB$ & $amb$ inter ſe ſimiles. Quod ſi enim maneat $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$, atque ſit $ac = \frac{1}{n} \cdot AC = \frac{a}{n}$; tum vero capiatur $ap = \frac{1}{n} AP = \frac{x}{n}$, erit $pm = \frac{1}{n} PM = \frac{y}{n}$; namque ſi in illa æquatione, loco $a$, $x$, & $y$, ſcribantur reſpective $\frac{a}{n}$, $\frac{x}{n}$ & $\frac{y}{n}$, ob omnes terminos per $n^3$ diviſos, eadem ipſa reſultabit æquatio. TAB. XXI. Fig. 82. TAB. XXI. Fig. 83.

438. Curvæ ergo ſimiles hanc habebunt proprietatem, ex qua ſimilitudinis natura eo luculentius apparebit, ut ſumtis Abſciſſis $AP$, $ap$ in ratione Parametrorum $AC$ & $ac$ Applicatæ $PM$ & $pm$ ſimul eandem habituræ ſint rationem: ſcilicet, ſi ſumatur $AP : ap = AC : ac$, tum quoque erit $PM : pm = AC : ac$. Cum ergo ſit $AP : PM = ap : pm$, hæ Curvæ in ſenſu geometrico inter ſe erunt ſimiles, atque, quantitate excepta, iiſdem prorſus affectionibus gaudebunt. Sumtis nimirum Abſciſſis $AP$, $ap$ homologis ſeu Parametris $AC$ & $ac$ proportionalibus, non ſolum Applicatæ $PM$ &

Digitized by Google

LIB. II. $pm$ rationem tenebunt Parametrorum ſed etiam omnes aliæ Lineæ ſimiliter ductæ, quin etiam Curvarum arcus $AM$ & $am$ erunt ut $AC$ & $ac$. Tum vero etiam Areæ ſimiles $APM$ & $apm$ erunt in ratione duplicata, ſeu ut $AC^2$ ad $ac^2$. Atque, ſi ſumantur duo puncta homologa $O$ & $o$ quæcunque, ita ut ſit $AO : ao = AC : ac$, ex iiſque ſub æqualibus angulis $AOM$, $aom$ ad Curvas rectæ ducantur $OM$ & $om$, erit quoque $OM : om = AC : ac$. Ob ſimilitudinem denique etiam Tangentes in punctis homologis $M$ & $m$ ad Axem æqualiter inclinabuntur, atque adeo radii oſculi ibidem tenebunt rationem Parametrorum $AC$ & $ac$.

439. Hinc patet omnes Circulos eſſe figuras ſimiles, quæ continentur æquatione $yy = 2ax - xx$; parique modo omnes Curvæ æquatione $yy = ax$ contentæ, hoc eſt omnes Parabolæ, erunt inter ſe figuræ ſimiles. Ex hujuſmodi autem æquationibus, quibus Curvas ſimiles contineri vidimus, quia Coordinatæ $x$ & $y$ cum Parametro $a$ ubique eundem conſtituunt dimenſionum numerum; ſi valor ipſius $y$ definiatur, reperietur is æqualis Functioni homogeneæ unius dimenſionis ipſarum $a$ & $x$. Viciſſim ergo, ſi denotet $P$ Functionem homogeneam unius dimenſionis ipſarum $a$ & $x$, æquatio $y = P$ innumerabiles continebit Curvas ſimiles, quæ oriuntur, ſi Parametro $a$ ſucceſſive alii atque alii valores tribuantur. Simili autem modo ex hujuſmodi æquatione pro Curvis ſimilibus Abſciſſa $x$ æquabitur Functioni unius dimenſionis ipſarum $a$ & $y$, atque ipſa Parameter $a$ æqualis erit Functioni unius dimenſionis ipſarum $x$ & $y$.

440. Data autem Curva quacunque $AMB$, infinitæ aliæ ipſi ſimiles $amb$ per facilem praxin deſcribi poſſunt. Sumatur enim ratio quæcunque, quam latera homologa Curvæ datæ & deſcribendæ inter ſe tenere debeant, quæ ſit $1 : n$; atque, ſi Curva data $AMB$ referatur ad Axem $AB$ per Coordinatas normales $AP$ & $PM$, ſuper Axe ſimili $ab$ capiatur Abſciſſa $ap$, ut ſit $AP : ap = 1 : n$, & ex $p$ erigatur Applicata normalis $pm$, ut ſit pariter $PM : pm = 1 : n$, eritque punctum $m$ in

Curva ſimili $a\ m\ b$, ita ut puncta $M$ & $m$ ſint homologa. Vel, deſcriptio quoque ex puncto quocunque fixo $O$ abſolvi poterit; ſumto enim in Curva deſcribenda puncto ſimili fixo $o$, fiat perpetuo angulus $a\ o\ m$ æqualis angulo $A\ O\ M$, & abſcindatur $o\ m$, ut ſit $O\ M : o\ m = 1 : n$, eritque punctum $m$ pariter in Curva ſimili $a\ m\ b$. Hoc itaque modo, pro quamvis ratione $1 : n$ ad arbitrium aſſumta, Curva ſimilis deſcribi poterit. Solent autem in hunc finem confici inſtrumenta mechadica, quorum ope figuræ cujuſcunque magnitudinis, quæ ſint natæ ſimiles, delineari poſſunt.

441. Quod ſi igitur natura Curvæ propoſitæ $AM$ exprimatur æquatione quacunque inter Coordinatas $AP = x$, & $PM = y$, inde facili negotio reperietur æquatio pro Curva ſimili $am$. Sit enim Abſciſſa homologa $ap = X$ & Applicata $pm = Y$; erit ex conſtructione $x : X = 1 : n$ & $y : Y = 1 : n$; unde fit $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Hi ergo valores in æquatione in $x$ & $y$ data ſubſtituti producent æquationem inter $X$ & $Y$ pro Curvis ſimilibus. Si igitur in hac nova æquatione ſolæ Coordinatæ $X$ & $Y$ cum littera $n$ dimenſiones conſtituere cenſeantur, numerus dimenſionum ubique erit nullus; vel, ſi æquatio, ad fractiones tollendas, multiplicetur per quampiam poteſtatem ipſius $n$, orietur æquatio, in qua tres hæ quantitates $X$, $Y$, & $n$ ubique eundem dimenſionum numerum producant. Supra autem vidimus in omni æquatione pro Curvis ſimilibus ambas Coordinatas cum ea conſtante, cujus variatione Curvæ ſimiles exiſtunt, ubique eundem dimenſionum numerum conſtituere; quod igitur eſt criterium æquationum Curvas ſimiles continentium.

442. Quemadmodum in Curvis ſimilibus Abſciſſæ & Applicatæ homologæ in eadem ratione ſive augentur ſive diminuuntur; ita, ſi Abſciſſæ aliam ſequantur rationem, aliam vero Applicatæ, Curvæ non amplius orientur ſimiles. Verum tamen, quia Curvæ hoc modo ortæ inter ſe quandam Affinitatem tenent, has Curvas *affines* vocabimus: complectitur ergo

LIB. II. Affinitas ſub ſe ſimilitudinem tanquam ſpeciem: quippe Curvæ affines in ſimiles abeunt, ſi ambæ illæ rationes, quas Abſciſſæ & Applicatæ ſeorſim ſequuntur, evadant æquales. Ex Curva ergo quacunque data $AMB$ innumerabiles Curvæ affines $amb$ reperientur hoc modo; ſumatur Abſciſſa $ap$, ita ut ſit $AP:ap=1:m$; tum conſtituatur Applicata $pm$, ut ſit $PM:pm=1:n$; ſicque, mutando harum rationum $1:m$ & $1:n$, vel alterutram vel utramque, innumerabiles prodibunt Curvæ, quæ primæ $AMB$ erunt affines.

TAB. XXI. Fig. 88. & 89.

443. Exprimatur natura Curvæ datæ $AMB$ æquatione quacunque inter Coordinatas orthogonales $AP=x$, & $PM=y$; atque in Curva affini $amb$ modo præcedente deſcripta ponatur Abſciſſa $ap=X$, & Applicata $pm=Y$, ob $x:X=1:m$, & $y:Y=1:n$, erit $x=\frac{X}{m}$ & $y=\frac{Y}{n}$. Quod ſi ergo hi valores in æquatione inter $x$ & $y$ data ſubſtituantur, proveniet æquatio generalis pro Curvis affinibus inter $X$ & $Y$. Ad hujus æquationis naturam penitius evolvendam, ponamus æquationem pro Curva data $AMB$ ita eſſe conformatam, ut Applicata $y$ æquetur Functioni cuicunque ipſius $x$, quæ ſit $=P$, ſeu eſſe $y=P$. Si igitur in $P$ loco $x$ ſubſtituatur $\frac{X}{m}$, fiet $P$ Functio nullius dimenſionis ipſarum $X$ & $m$; ideoque æquatio generalis pro Curvis Affinibus ita erit comparata, ut $\frac{Y}{n}$ æquetur Functioni nullius dimenſionis ipſarum $X$ & $m$; ſeu, quod eodem redit, Functio nullius dimenſionis ipſarum $Y$ & $n$ æquabitur Functioni nullius dimenſionis ipſarum $X$ & $m$.

444. Diſcrimen autem inter Curvas ſimiles & affines hoc potiſſimum eſt notandum, quod Curvæ, quæ ſunt ſimiles reſpectu unius Axis vel puncti fixi, eædem ſimiles ſint futuræ reſpectu aliorum quorumvis Axium ſeu punctorum homologorum. Curvæ autem, quæ tantum ſunt affines, tales tantum ſunt reſpectu eorum Axium, ad quos referuntur, neque pro lubitu alii Axes, ſeu puncta homologa, in ipſis dantur, ad

quæ

Digitized by Google

quæ affinitas referri poſſit. Ceterum vero, notandum eſt, uti omnes Curvæ ſimiles ad eundem ordinem, atque adeo ad idem Linearum Genus referuntur; ita etiam Curvas affines ſemper in eodem Linearum ordine eodemque genere comprehendi. Quæ ut clarius percipiantur, ſimilitudinem atque affinitatem nonnullis exemplis Curvarum notiorum illuſtraſſe conveniet.

445. Sit igitur Curva data Circulus ad Diametrum relatus, cujus natura exprimitur æquatione $yy = 2cx - xx$. Ponatur $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$, atque æquatio inter $X$ & $Y$ reſultans complectetur omnes Curvas ſimiles; erit autem $\frac{Y^2}{n^2} = \frac{2cX}{n} - \frac{XX}{nn}$, ſeu, $Y^2 = 2ncX - XX$; ex qua patet omnes Curvas Circulos ſimiles quoque eſſe Circulos, quorum Diametri $2nc$ utcunque diſcrepent. Ad Curvas autem Circulo affines inveniendas ponatur $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$, prodibitque $\frac{Y^2}{nn} = \frac{2cX}{m} - \frac{XX}{mm}$, ſeu $m^2 Y^2 = 2mn^2 cX - nnXX$, quæ eſt æquatio generalis pro Ellipſi ad alterum Axem principalem relata; unde intelligitur omnes Ellipſes eſſe Lineas curvas Circulo affines. Quare, omnes Ellipſes ſunt quoque Curvæ inter ſe affines. Simili autem modo intelligetur, omnes Hyperbolas eſſe Curvas inter ſe affines. Ellipſes autem, atque etiam Hyperbolæ, in quibus eadem ratio inter binos Axes principales intercedit, Curvæ erunt inter ſe ſimiles.

446. Quod ad Parabolam æquatione $yy = cx$ expreſſam attinet, perſpicuum quidem eſt omnes Curvas ipſi ſimiles quoque eſſe Parabolas, atque adeo omnes Parabolas eſſe Curvas inter ſe ſimiles. Quod ſi autem ad Curvas Parabolæ affines ſpectemus, poſito $y = \frac{Y}{n}$ & $x = \frac{X}{m}$, prodibit æquatio $Y^2 = \frac{n^2 c}{m} X$, quæ cum etiam ſit pro Parabolis, manifeſtum eſt,



Digitized by Google

LIB. II. quæ Curvæ Parabolæ ſint affines, eaſdem ſimul Parabolæ eſſe ſimiles; ita ut hoc caſu ſimilitudo æque late pateat atque affinitas. Idem quoque evenit in omnibus Curvis, quarum natura exprimitur æquatione duobus tantum terminis conſtante, cujuſmodi ſunt $y^3 = ccx$; $y^3 = cxx$; $y^2x = c^3$; &c.; his nimirum Curvis, cum parabolicis tum hyperbolicis, quæ aliæ Curvæ ſunt affines eædem quoque ſunt ſimiles; quæ convenientia in Curvis alius generis non locum habet, uti jam de Circulo & Ellipſi notavimus.

447. Quemadmodum ex data æquatione inter $x$ & $y$, quam quotcunque quantitates conſtantes $a$, $b$, $c$, &c. ingrediantur, ſi ſingulis conſtantibus determinati valores tribuantur, unica Linea curva determinata oritur; ita, ſi una conſtantium, puta $a$ mutabilis aſſumatur, eique ſucceſſive alii atque alii valores tribuantur, quia ex unoquoque valore peculiaris Curva naſcitur, omnino infinitæ Curvæ orientur, quæ erunt ſimiles ſi, præter $a$, nullæ aliæ Lineæ conſtantes æquationem ingrediantur; contra vero diſſimiles. Sin autem, præter $a$, alia quoque conſtans $b$ mutabilis ſtatuatur; tum, ob mutabilitatem ipſius $b$, ex unoquoque ipſius $a$ valore emergent Lineæ curvæ infinitæ, ſicque omnino ex mutabilitate duarum conſtantium $a$ & $b$ infinities infinitæ provenient Lineæ curvæ differentes. Si inſuper tertia conſtans $c$ mutabilis aſſumatur, tum adhuc infinities plures reſultabunt Lineæ curvæ; ſicque quo major fuerit conſtantium, quæ mutabiles ſtatuuntur, numerus, eo majore infiniti poteſtate numerus Curvarum reſultantium exprimetur.

448. Conſideremus autem aliquanto diligentius eas Lineas curvas infinitas, quæ ex una æquatione prodeunt, dum tantum una Linearum conſtantium mutabilis aſſumitur. Hujuſmodi autem æquatio, ſi idem Axis idemque Abſciſſarum initium retineatur, non ſolum Lineas illas curvas infinitas exhibet, ſed etiam earum poſitionem indicat, ita ut his Curvis infinitis ſpatium quodpiam impleatur, in quo nullum aſſignari queat punctum, quin per id aliqua infinitarum Curvarum tran-

Digitized by Google

ſeat. Prout ergo æquatio fuerit comparata, Curvæ illæ infinitæ vel erunt diſſimiles vel ſimiles, uti ex præcedentibus judicare licet; quin etiam evenire poteſt, ut omnes Curvæ ſint inter ſe non ſolum ſimiles ſed etiam æquales, ratione ſitus tantum differentes. Sic iſta æquatio $y = a + \sqrt{(2cx - xx)}$, poſita $a$ mutabili, exhibebit infinitos Circulos æquales radii $= c$, quorum centra ſunt in recta ad Axem normali ſita. CAP. XVIII.

449. Hinc etiam viciſſim, ſi una eademque Curva ſuper plano in infinitis diverſis ſitibus ſecundum certam legem deſcribatur, æquatio præberi poterit, qua per unius conſtantis mutabilitatem omnes hæ infinitæ Curvæ inter ſe æquales ſimul exhibeantur. Sit Curva infinitis variis ſitibus exhibita Circulus cujus radius $= c$, qui ita infinities deſcribatur, ut vertices $A$, $a$, datam Curvam $AaL$, quæ *Directrix* vocetur, conſtituant; Diametri autem $ab$ perpetuo Axi $AB$ maneant parallelæ. Ad æquationem ergo pro his infinitis Circulis inveniendam, ſumatur quodvis Directricis punctum $a$, unde in Axem principalem demittatur perpendiculum, $aK$. Ponatur $AK = a$; &, ob Directricem datam, dabitur $Ka$ per $a$: ſit ergo $Ka = \mathrm{A}$, eritque A Functio quæpiam ipſius $a$ data. Tum ex $a$ Axi principali ducatur parallela $ab$, quæ erit Diameter Circuli Verticem in Directricis puncto $a$ habentis, ex cujus puncto quovis $m$ ducatur Applicata $mP = y$, reſpondens Abſciſſæ $AP = x$; erit ergo $ap = x - a$, & $pm = y - \mathrm{A}$. Poſitis autem $ap = t$, & $pm = u$; erit, ex natura Circuli, $uu = 2ct - tt$; jam, ob $t = x - a$, & $u = y - \mathrm{A}$, habebitur $(y - \mathrm{A})^2 = 2c(x - a) - (x - a)^2$, quæ erit æquatio generalis omnes Circulos ſecundum Directricem $AaL$ modo deſcripto diſpoſitos complectens. Omnes ſcilicet illi Circuli ex æquatione inventa prodibunt, ſi Linea $a$, a qua ſimul A pendet, mutabilis aſſumatur. TAB. XXII. *Fig.* 90.

450. Simili modo ſi, loco Circuli, alia quæcunque Linea Curva $amb$ ita promoveatur ſecundum ductum Directricis $AaL$, ut ejus Vertex ſeu Abſciſſarum initium $a$ in Directrice, atque Axis $ab$ ſibi perpetuo parallelus maneat, eadem Linea



Digitized by Google

LIB. II. curva infinities deſcripta habebitur, atque æquatio inveniri poterit, qua omnium harum Linearum curvarum natura ſimul comprehendatur. Data ſit natura hujus Curvæ promotæ per æquationem inter Coordinatas $ap = t$ & $pm = u$; ac, pro Axe principali, ad quem omnes Curvæ junctim conſideratæ referantur ſumatur recta $AB$ Axibus $ab$ parallela, quæ ſimul ſit Axis Directricis $AaL$. Poſito jam, ut ante $AK = a$, & $Ka = A$, ita ut A ſit Functio quædam ipſius $a$, vocetur Abſciſſa $AP = x$, & Applicata $Pm = y$, erit $t = x - a$, & $u = y - A$. Quod ſi ergo hi valores loco $t$ & $u$ in æquatione inter $t$ & $u$ data ſubſtituantur, obtinebitur æquatio generalis omnes Curvas $amb$ conjunctim complectens. Quicunque enim valor determinatus ipſi $a$ tribuatur, prodibit una quædam Curva $amb$ ex infinitis quæ per hunc motum ſunt deſcriptæ. Sic, ſi Curva $amb$ fuerit Parabola æquatione $uu = ct$ expreſſa, tum infinitæ Parabolæ æquales, quarum Vertices per Directricem $AaL$ ſunt diſpoſiti, Axeſque rectæ $AB$ paralleli, continebuntur in hac æquatione $(y - A)^2 = c(x - a)$.

451. Quemadmodum hic Verticem Curvæ $A$ in data Curva Directrice ita promoveri poſuimus, ut ejus Axis ſibi ſemper maneret parallelus; ita etiam, dum Vertex per datam Curvam transfertur, poſitio Axis Curvæ $ab$ utcunque variari poterit; ſicque multo generalior obtinebitur æquatio pro eadem Curva in dato plano ſecundum quamcunque legem infinities deſcripta. Quod quo clarius expediamus, ponamus primum Verticem Curvæ $A$ per circumferentiam $Aa$ ita progredi, ut Axis Curvæ $ab$ perpetuo ad Centrum Circuli $O$ dirigatur. Motus igitur rotatorius Curvæ $AMB$ cum Axe $BAO$ circa punctum $O$ factus exhibebit omnes illos infinitos ejuſdem Curvæ $AMB$ ſitus diverſos quos omnes in una æquatione, quam conſtans quæpiam mutabilis poſita ingrediatur, complecti oportet.

TAB. XXII. *Fig.* 91.

452. Statuatur radius invariabilis $AO = aO = c$; ſitque angulus $AOa = \alpha$, qui mutabilis aſſumitur: ex Curvæ in ſitu

quocunque $a m b$ deſcriptæ puncto quovis $m$ ad rectam $O A B$ pro Axe principali aſſumtam demittatur Applicata $m P$, ſitque $O P = x$, & $P m = y$. Tum ex $m$ in proprium Curvæ $amb$ Axem $a b$ demittatur quoque perpendicularis $m p$ : vocatiſque $a p = t$, & $p m = u$, dabitur æquatio invariabilis inter $t$ & $u$, qua natura Curvæ $a m b$ exprimitur. Ex $P$ ducatur $P s$ ipſi $O b$ parallela, cui Applicata $m p$ producta occurrat in $s$; eritque $p s = x. ſin. \alpha$ ; $O p - P s = x. coſ. \alpha$ ; tum vero, ob angulum $P m s = A O a = \alpha$ ; erit $P s = y.\ ſin.\ \alpha$ & $m s = y\ coſ.\ \alpha$. Hinc erit $O p = c + t = x.\ coſ.\ \alpha + y. ſin.\ \alpha$ & $m p = u = y.\ coſ.\ \alpha - x. ſin.\ \alpha$ In æquatione ergo inter $t$ & $u$ data ſubſtituantur $t = x. coſ. \alpha + y. ſin. \alpha - c$ & $u = y. coſ. \alpha - x. ſin. \alpha$; prodibitque æquatio generalis inter Coordinatas $x$ & $y$, quæ, angulo $\alpha$ mutabili aſſumto, omnes Curvas $a m b$ in ſe complectetur. CAP. XVIII.

453. Promoveatur nunc autem Vertex Curvæ $A M B$ ſecundum Directricem quamcunque $A a L$, interea vero poſitio Axis $a b$ continuo ita mutetur, ut angulus $A O a$ quomodocunque pendeat a puncto $a$. Scilicet, Vertice in $a$ verſante, ſit $A K = a$, & $K a = A$, atque angulus $A O a = \alpha$; ubi, ob Directricem datam, erit A Functio quædam cognita ipſius $a$ : anguli $\alpha$ autem ſinus coſinuſve ſit pariter Functio quæpiam ipſius $a$. His poſitis, erit $K O = \frac{A}{tang.\ \alpha}$, & $O a = \frac{A}{ſin.\ \alpha}$. Ex Curvæ $a m b$ puncto quocunque $m$ primum ad Axem principalem $A O$ demittatur perpendiculum $m P$, tum vero etiam in proprium Axem $m p$, ſitque $A P = x$, $P m = y$; & $a p = t$, $p m = u$, dabiturque æquatio invariabilis inter Coordinatas $t$ & $u$, ex qua æquatio variabilis inter $x$ & $y$ omnes Curvas $a m b$ complectens definiri debet. TAB. XXII. *Fig.* 92.

454. Ad hoc præſtandum ex $P$ in $m p$ productam ducatur normalis $P s$, quæ erit Axi Curvæ $a b O$ parallela : atque, ob angulum $P m s = A O a = \alpha$, erit $P s = y.\ ſin.\ \alpha$ & $m s =$

LIB. II. $y.\,coſ.\,\alpha$. Deinde, ob $OP = a + \frac{A}{tang.\,\alpha} - x$, erit $ps = a.\,ſin.\,\alpha. + A.\,coſ.\,\alpha. - x.\,ſin.\,\alpha$, & $Op - Ps = a.\,coſ.\,\alpha + \frac{A.\,coſ.\,\alpha}{tang.\,\alpha} - x.\,coſ.\,\alpha$. Hinc erit $Op = a\,coſ.\,\alpha + \frac{A.\,coſ.\,\alpha}{tang.\,\alpha} - x.\,coſ.\,\alpha + y.\,ſin.\,\alpha = \frac{A}{ſin.\,\alpha} - t$; ideoque $t = A.\,ſin.\,\alpha - a.\,coſ.\,\alpha + x.\,coſ.\,\alpha - y.\,ſin.\,\alpha$, & $u = -a.\,ſin.\,\alpha - A.\,coſ.\,\alpha + x.\,ſin.\,\alpha + y.\,coſ.\,\alpha$. Quam ob rem, ſi in æquatione inter $t$ & $u$ data ſubſtituantur,

$$t = (x - a).\,coſ.\,\alpha - (y - A).\,ſin.\,\alpha$$
&
$$u = (x - a).\,ſin.\,\alpha + (y - A).\,coſ.\,\alpha$$

orietur æquatio quæſita inter $x$ & $y$. Quacunque ergo lege eadem Curva $amb$ in plano infinities deſcribatur, hoc modo invenietur æquatio generalis iſtas Curvas omnes ſimul in ſe continens.

455. Hoc igitur modo in æquationem includuntur Curvæ numero infinitæ eædem, tantum ratione ſitus a ſe invicem diſcrepantes; ſi quidem æquatio, quæ inter $t$ & $u$ datur, fuerit invariabilis, neque conſtantem mutabilem $a$ in ſe contineat. Quod ſi autem una pluresve conſtantes, quæ in æquatione inter $t$ & $u$ inſunt, ſimul ab $a$ pendere aſſumantur, tum obtinebuntur infinitæ Curvæ diverſæ, ſive ſimiles ſive diſſimiles, eadem pariter æquatione contentæ: Similes ſcilicet erunt omnes Curvæ, ſi æquatio inter $t$ & $u$ ita fuerit comparata ut $u$ æquetur Functioni cuicunque homogeneæ unius dimenſionis ipſarum $t$ & $f$, exiſtente $f$ quantitate utcunque ab $a$ pendente; ſin ſecus accidat, Curvæ erunt diſſimiles.

TAB. XXII. Fig. 93. 456. Ut hoc argumentum Curvarum diverſarum exemplo illuſtremus, ponamus infinitos deſcribi Circulos $AB$, $\alpha B$, $amB$ per datum punctum $B$ tranſeuntes, qui omnes Centra ſua habeant ſita in recta $AE$, cujuſmodi Circulis in mappis geographicis meridiani repræſentari ſolent. Demittatur ex $B$

Digitized by Google

perpendiculum in rectam $AC$, ſitque $BC = c$, quod intervallum eſt invariabile. Tum conſideretur Circulus infinitorum deſcriptorum quicunque $amB$; unde una demiſſa Applicata $mP$, ſit $CP = x$, & $Pm = y$, radius porro hujus Circuli, qui, etſi reſpectu ejuſdem Circuli eſt conſtans, tamen reſpectu omnium eſt mutabilis, ponatur $aE = BE = a$: erit $CE = \surd(aa - cc)$ & $PE = x + \surd(aa - cc)$. Cum igitur ſit $PE^2 + Pm^2 = aa$, erit $y^2 + x^2 + 2x\surd(aa - cc) + aa - cc = aa$; ſeu $yy = cc - 2x\surd(aa - cc) - xx$: ſin autem intervallum $CE$ loco conſtantis variabilis in æquationem introducatur, ponaturque $CE = a$, habebitur hæc æquatio aliquanto ſimplicior $yy = cc - 2ax - xx$, quæ, ob mutabilitatem ipſius $a$, omnes omnino Circulos per $B$ ductos & Centra in recta $AE$ habentes exhibebit. Simili vero modo Curvæ quæcunque infinitæ certa quadam lege diſpoſitæ ad unam æquationem revocabuntur, dummodo diſcrimen inter conſtantes variabiles & invariabiles probe obſervetur. CAP. XVIII.

## CAPUT XIX.

### *De interſectione Curvarum.*

457. QUEMADMODUM Lineæ curvæ a rectis interſecentur, in præcedentibus Capitibus jam ſæpius vidimus, ubi oſtendimus Lineas ſecundi ordinis a rectis in pluribus quam duobus punctis ſecari non poſſe, Lineas autem tertii ordinis plures quam tres interſectiones, & quarti ordinis plures quam quatuor & ita porro non admittere. Cum igitur in hoc Capite conſtituerim interſectiones, quas duæ quævis Curvæ inter ſe faciunt, definire, oportebit hanc tractationem a Lineis rectis inchoare, atque ipſa illa puncta indagare, in quibus recta quæpiam data Curvam datam trajicit. Hoc enim modo via parabitur ad interſectiones mutuas Linearum curva-

 rum determinandas, quod argumentum maximum uſum habere ſolet in conſtruendis æquationibus altiorum graduum, qua de re in ſequenti Capite fuſius tractabo.

TAB. XXIII. *Fig.* 94. 458. Sit igitur propoſita Curva quæcunque $AMm$, cujus natura data ſit per æquationem inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, $PM = y$. Ducatur jam recta quæcunque $BMm$, quæ quot & quibuſque in punctis ſectura ſit Curvam $AMm$ definiri oporteat. Ad hoc quæratur æquatio pro Linea recta pariter inter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$ ad eundem Axem $AP$ idemque Abſciſſarum initium $A$ relata. Æquatio ergo pro Linea recta erit hujuſmodi $\alpha x + \beta y = \gamma$; qua indicatur, poſito $x = 0$, fore $y = AD = \frac{\gamma}{\beta}$, poſito autem $y = 0$, fore $x = -AB = \frac{\gamma}{\alpha}$; unde, concurſus $B$ hujus rectæ cum Axe, pariterque angulus ad $B$, cujus tangens eſt $= \frac{AD}{AB} = \frac{-\alpha}{\beta}$, innoteſcit. Sic igitur tam Curva quam Recta propoſita per æquationes inter communes Coordinatas $x$ & $y$ exprimuntur.

459. Quod ſi in utraque æquatione Abſciſſas $x$ perpetuo æquales aſſumamus, Applicatæ $y$, ſi ſint diverſæ, oſtendent, quantum Curvæ & rectæ puncta eidem Abſciſſæ reſpondentia a ſe invicem diſtent. Si igitur ex utraque æquatione æqualis prodeat valor Applicatæ $y$, tum ibi Curva & recta commune habebunt punctum, ideoque eo in loco dabitur interſectio. Ad interſectiones ergo inveniendas in utraque æquatione, præter Abſciſſas $x$, quoque Applicatæ $y$ æquales ſunt conſtituendæ; ſicque habebuntur duæ æquationes duas quantitates incognitas $x$ & $y$ evolventes, ex quarum reſolutione vel Abſciſſæ $x$, quibus interſectiones reſpondent, vel Applicatæ $y$ reperientur. Scilicet, ſi ex iſtis duabus æquationibus eliminetur incognita $y$, æquatio naſcetur ſolam incognitam $x$ complectens, cujus valores exhibebunt Abſciſſas $AP$, $Ap$ unde Applicatæ $PM$, $pm$ eductæ per interſectionum puncta $M$ & $m$ tranſibunt.

460.

460. Cum æquatio pro recta $BMm$ ſit $\alpha x + \beta y = \gamma$, ex ea fiet $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$; qui valor ſi in æquatione pro Curva loco $y$ ſubſtituatur, orietur æquatio tantum $x$ continens, cujus radices reales præbebunt omnes Abſciſſas, quibus interſectiones reſpondent; ideoque interſectionum numerus colligetur ex numero radicum realium ipſius $x$, quas æquatio inventa ſuppeditat. Quoniam vero in valore ipſius $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$, incognita $x$ unicam tenet dimenſionem, poſt ſubſtitutionem emerget æquatio, in qua $x$ non plures habebit dimenſiones, quam antea in æquatione pro Curva ambæ $x$ & $y$ conjunctim tenuerant. Habebit ergo $x$ vel totidem dimenſiones vel pauciores, ſi quidem per ſubſtitutionem ſummæ ipſius $x$ poteſtates tollantur.

461. Inventis hoc modo Abſciſſis $AP$, $Ap$, quæ interſectionibus reſpondent, ex iis ipſa interſectionum puncta $M$ & $m$ facile definientur. Cum enim Applicatæ in punctis $P$ & $p$ erectæ per interſectiones tranſeant, ea tantum puncta erunt notanda, ubi hæ Applicatæ rectam $BMm$ ſecant. Notari quoque poſſent puncta, quibus iſtæ Applicatæ Curvæ $AMm$ occurrunt; cum autem ſæpenumero una Applicata Curvæ in pluribus punctis occurrat, incertum foret quodnam Curvæ punctum ſimul interſectionem ſit præbiturum. Hoc autem incommodum uſu non venit, ſi interſectiones ex recta $BMm$ æſtimentur; quippe a qua unaquæque Applicata non niſi in unico puncto ſecari poteſt. Quod ſi autem eveniat, ut duo ipſius $x$ valores fiant inter ſe æquales, tum duo interſectionum puncta $M$ & $m$ in unum coaleſcent; quo ergo caſu vel recta $BM$ Curvam tanget, vel eam in puncto duplici ſecabit.

462. Si, eliminata incognita $y$, æquatio reſultans qua $x$ definitur, nullam habeat radicem realem, tum hoc erit indicium Curvam nuſquam a recta $BMm$ ſecari vel tangi; radices autem reales (quotquot fuerint) illius æquationis oſtendent totidem interſectiones; quia unicuique Abſciſſæ reali una rectæ $BMm$ Applicata realis reſpondet; cui cum ſit æqualis Ap-



Digitized by Google

LIB. II. plicata Curvæ, fieri non poteſt, quin ibi nulla exiſtat interſectio. Hæc ideo iſto loco probe ſunt notanda, quod in interſectione Linearum curvarum non ſemper ſingulæ radices totidem interſectiones indicent; cujus ratio mox fiet manifeſta, cum duas Lineas curvas contemplabimur, earumque interſectiones inveſtigabimus.

TAB. XXIII. Fig. 95. 463. Sint igitur deſcriptæ duæ Curvæ quæcunque $MEm$, $MFm$, quæ ſe mutuo interſecent; ad quarum inteſerctiones definiendas, natura utriuſque exprimatur per æquationem inter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$ ad eundem communem Axem $AB$ idemque Abſciſſarum initium $A$ relatas. Sumtis ergo pro utraque Curva Abſciſſis $x$ æqualibus, ubi dantur interſectiones, ibidem Applicatæ $y$ convenient. Quocirca, ſi ex duabus Curvarum æquationibus propoſitis, eliminando $y$, formetur nova æquatio ſolam $x$ tanquam incognitam involvens, interſectiones omnes $M$, $m$, $m$, quotquot fuerint, indicabuntur per radices reales iſtius æquationis; ſcilicet, Abſciſſæ $AP$, $Ap$, $Ap$, &c. quæ interſectionibus $M$, $m$, $m$, &c. reſpondent, erunt valores ipſius $x$ convenientes pro illa æquatione.

464. Inventis autem Abſciſſis his $AP$, $Ap$ &c., quæ interſectionibus conveniunt, non tam facile erit ipſa interſectionum puncta definire. Si enim pro utraque Curva eidem Abſciſſæ $AP$ plures Applicatæ reſpondeant, quod evenit, ſi pro utraque Curva fuerit $y$ Functio multiformis ipſius $x$, tum ex hac duplici Applicatarum multitudine eas, quæ ſint inter ſe æquales, eligi oportet: quæ inveſtigatio eo erit moleſtior, quo plures valores Applicata $y$ in utraque Curva obtineat. Huic tamen difficultati facile occurretur, ſi, dum ex binis æquationibus propoſitis Applicata $y$ eliminatur, ea æquatio in ſubſidium vocetur, qua $y$ per $x$ definitur; ex hac enim æquatione pro quovis ipſius $x$ valore invento cognoſcetur magnitudo Applicatæ ex puncto $P$ ad interſectionem uſque pertingentis; neque ad hoc opus erit, naturam alterutrius vel adeo utriuſque Curvæ perpendiſſe.

Digitized by Google

465. Sit una Curva Parabola, cujus natura hac exprimatur æquatione $yy - 2xy + xx - 2ax = 0$; altera vero ſit Circulus æquatione $yy + xx - cc = 0$, expreſſus. Ad $y$ elimininandum ſubtrahatur primum prior æquatio a poſteriori, ac remanebit CAP. XIX.

$$2xy + 2ax - cc = 0, \text{ unde fit } y = \frac{cc - 2ax}{2x}$$

ex qua jam patet, quicunque valores pro $x$ reſultent, iis ſemper valores ipſius $y$ reales repertum iri. Subſtituatur ergo iſte valor pro $y$ inventus in altera æquatione, ac prodibit

$$c^4 - 4accx + 4(aa - cc)xx + 4x^4 = 0,$$

cujus adeo æquationis ſingulæ radices reales præbebunt interſectiones veras. Ponamus eſſe $c = 2a$ ideoque

$$4a^4 - 4a^3x - 3aaxx + x^4 = 0,$$

cujus æquationis una radix eſt $x = 2a$, qua extracta remanebit hæc æquatio

$$x^3 + 2axx + aax - 2a^3 = 0,$$

quæ unam adhuc præbet radicem realem; utrique autem Applicata conveniens invenitur ex hac æquatione $y = \frac{2aa - ax}{x}$, priori ſcilicet $x = 2a$, reſpondebit $y = 0$, ita ut interſectio in ipſo fiat Axe.

466. Hinc intelligitur quoties ambæ æquationes inter $x$ & $y$ ita fuerint comparatæ, ut in negotio eliminationis ipſius $y$ inveniatur Functio rationalis ipſius $x$ quæ æqualis ſit ipſi $y$; tum unamquamque radicem realem ipſius $x$, quam ultima æquatio, (poſtquam $y$ penitus eſt eliminata,) præbebit, exhibituram eſſe interſectionem veram. Verum, ſi inter eliminandum nulla inveniatur Functio rationalis ipſius $x$, quæ æqualis ſit ipſi $y$; tum evenire poteſt, ut non omnes radices reales ex ultima



Digitized by Google

LIB. II. æquatione erutæ præbeant interſectiones veras. Tantus enim ſubinde valor pro $x$ prodire poteſt, cui in neutra Curva Applicata realis reſpondeat; neque tamen hoc caſu calculus erroris eſt arguendus. Cum enim hujuſmodi Abſciſſæ pro utraque Curva Applicata imaginaria reſpondeat, in imaginariis autem æqualitas & inæqualitas æque locum habeat atque in realibus; nihil impedit, quo minus Applicatæ illæ imaginariæ inter ſe ſint æquales, ideoque interſectionem mentiantur.

TAB. XXIII. *Fig.* 96. 467. Ad hoc clarius oſtendendum, deſcribantur ſuper eodem Axe $BAE$ Parabola $EM$ Parametri $= 2a$, & extra eam Circulus $AmB$ Radii $= c$: exiſtente intervallo $AE = b$; ita ut certum ſit nullam prorſus dari interſectionem. Sumatur $A$ pro Abſciſſarum initio, quæ verſus $E$ affirmativæ, retro autem verſus $B$ negativæ ſtatuantur; atque, pro Parabola habebitur hæc æquatio $yy = 2ax - 2ab$; pro Circulo vero hæc $yy = -2cx - xx$. Quod, ſi jam, quaſi interſectionem indagare velimus, eliminemus $y$, ſtatim habebimus $xx + 2(a+c)x - 2ab = 0$, ex qua duo pro $x$ valores reales reperiuntur, nempe

$$x = -a - c \pm \surd((a+c)^2 + 2ab),$$

alter affirmativus, alter negativus; cum tamen nulla exiſtat interſectio. Pro his ſcilicet duabus Abſciſſis tam Parabola quam Circulus exhibebit Applicatas imaginarias, quæ, utut imaginariæ, tamen inter ſe erunt æquales: fiet autem hoc ipſius $x$ valore ſubſtituto

$$y = \surd(-2aa - 2ac - 2ab \pm 2a\surd(aa + 2ac + cc + 2ab))$$

quæ expreſſio utique eſt imaginaria.

468. Ex hoc exemplo intelligitur dari etiam Curvarum interſectionem imaginarias; quæ, etiamſi ſint nullæ, tamen per calculum æque indicentur ac reales. Atque hanc ob rem ex numero radicum realium ipſius $x$, quas ultima æquatio continet, non ſemper interſectionum numerus recte concludetur; fieri enim poteſt ut plures radices reales adſint quam inter-

ſectiones; atque etiam nulla omnino exiſtat interſectio; cum tamen duæ pluresve radices reales ipſius $x$ reſultent. Interim tamen quælibet interſectio ſemper unam inducet radicem realem ipſius $x$ in æquationem ultimam; & hanc ob rem ſemper tot, ad minimum, erunt radices reales ipſius $x$, quot ſunt interſectiones, etiamſi interdum plures radices reales affuerint. Utrum autem unicuique radici reali ipſius $x$ interſectio realis reſpondeat facile perſpicietur, ſi valor ipſius $y$ reſpondens quæratur, qui ſi prodeat realis, interſectio erit realis, ſin ſit imaginarius interſectio quoque erit imaginaria vel nulla.

469. Hæc igitur exceptio ſeu differentia inter radicum realium ipſius $x$ & interſectionum numerum tantum locum habet, ſi vel in utraque æquatione Applicata $y$ pares tantum ubique habeat dimenſiones, atque adeo Axis principalis ſimul ſit utriuſque Curvæ Diameter; vel ſi ambæ æquationes ita fuerint comparatæ, ut, dum eliminatur $yy$, ſimul $y$ ex calculo excedat; ſicque $y$ per Functionem rationalem ipſius $x$ exprimi nequeat. Sic, ſi altera æquatio fuerit $yy - xy = aa$, altera vero $y^4 - 2xy^3 + x^3y = bbxx$; cum ex priori ſit $(yy - xy)^2 = a^4$, ſeu $y^4 - 2xy^3 = a^4 - xxyy$, ſubſtituatur hic valor in altera, eritque $a^4 - xxyy + x^3y = bbxx$, ſeu $yy - xy = \frac{a^4 - bbxx}{xx} = aa$: unde fit $xx = \frac{a^4}{aa + bb}$ ideoque $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Videtur ergo dari duplex interſectio, ſed an utraque ſit realis ex valore ipſius $y$ colligi debet, quem hæc æquatio $yy - xy = aa$ ſuppeditat. Erit ergo

$$yy = \frac{\pm aay}{\sqrt{(aa+bb)}} + aa,$$

cujus cum omnes radices ſint reales, patet quatuor dari interſectiones, ita ut utrique Abſciſſæ $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa+bb)}}$ binæ interſectiones reales reſpondeant.

470. Quando autem neque Axis utriuſque Curvæ Diameter exiſtit, neque iſte caſus locum habet, ut dum altiores ipſius $y$ poteſtates eliminantur, ſimul $y$ prorſus eliminetur; tum,

LIB. II. quia ad Functionem rationalem ipſius $x$ pervenietur ipſi $y$ æqualem, ſingulæ radices reales ultimæ æquationis totidem indicabunt interſectiones veras, ita ut his caſibus nulla cautione ſit opus. Evenit hoc, ſi altera Curva abeat in rectam, uti ante vidimus, vel, ſi ejus Applicata exprimatur per Functionem uniformem ipſius $x$; tum enim nulli Abſciſſæ reſpondebit Applicata imaginaria; ideoque ſingulæ radices ipſius $x$ exhibebunt interſectiones veras. Plerumque autem, etiamſi $y$ in utraque æquatione plures obtineat dimenſiones, tamen inter eliminationem ipſius $y$, perveniri ſolet ad æquationem, qua valor ipſius $y$ per Functionem rationalem, ideoque uniformem, ipſius $x$ exprimitur.

471. Quoties autem accidit, ut aliquot interſectiones quas calculus exhibet, ſint imaginariæ, id non ſolum iis evenit caſibus, quando neutra Curva habet Applicatam realem illi Abſciſſæ inventæ reſpondentem; quod quidem factum eſt in ſuperiori Circuli & Parabolæ exemplo. Sed etiam ejuſmodi caſus exhiberi poſſunt, quibus una Curva pro omnibus Abſciſſis præbet Applicatas reales, neque tamen ſingulis radicibus realibus ipſius $x$ interſectiones reſpondeant. Hujuſmodi exemplum præbet Linea tertii ordinis, hac æquatione expreſſa

$$y^3 - 3ayy + 2aay - 6axx = 0,$$

quæ pro omnibus Abſciſſis reales præbet Applicatas; & quidem ternas ſi fuerit $x$ minor quam $\frac{a}{3}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. Quod, ſi cum hac Curva combinetur Parabola æquatione $yy - 2ax = 0$, contenta, cujus nulla datur Applicata realis, ſi $x$ ſit negativum, ideoque Abſciſſis $x$ negativis nulla interſectio convenire poteſt.

472. Eliminetur jam $y$: &, cum ſit ex æquatione poſteriori $yy = 2ax$, prior æquatio abibit in hanc

$$2axy - 6aax + 2aay - 6axx = 0, \text{ unde fit}$$

$y = \frac{6aax + 6axx}{2aa + 2ax} = 3x$. Quoniam vero illa æquatio eſt diviſibilis per $y - 3x$; ſi dividatur, orietur æquatio ab $y$ libera hæc $2aa + 2ax = 0$, unde oritur $x = -a$. Deberet ergo eſſe interſectio Curvarum reſpondens Abſciſſæ $x = -a$, cui in Parabola nulla applicata realis reſpondet: in Linea autem altera tertii ordinis, poſito $x = -a$, fit $y^3 - 3ayy + 2aay - 6a^3 = 0$, ex qua una naſcitur Applicata realis, $y = 3a$, reliqui duo ipſius $y$ valores in æquatione $yy + 2aa = 0$ contenti, ſunt imaginarii; hoc ſcilicet loco Applicatæ iſtæ imaginariæ æquales fiunt Applicatis Parabolæ imaginariis eodem hoc loco; ſicque habebuntur duæ interſectiones imaginariæ. Habebuntur vero etiam duæ interſectiones reales ex ſuperioris æquationis Factore $y - 3x = 0$, oriundæ; ex qua fit $9xx - 2ax = 0$. Primum ergo in ipſo Abſciſſarum initio, ubi $x = 0$, ſimulque $y = 0$, exiſtit interſectio, altera reſpondet Abſciſſæ $x = \frac{2a}{9}$, ubi eſt $y = 3x = \frac{2a}{3}$.



473. Hoc igitur caſu perventum eſt ad interſectiones imaginarias, etiamſi in negotio eliminationis ipſius $y$, prodierit æquatio $2axy - 6aax + 2aay - 6axx = 0$, in qua $y$ unicam tantum obtinet dimenſionem, ita ut inde $y$ per Functionem rationalem ipſius $x$ exprimi poſſe videatur, quod ante tanquam criterium nullarum interſectionum imaginariarum annotavimus. Atque revera, ſi hæc æquatio nullos haberet diviſores, interſectionibus imaginariis nullus locus relinqueretur, quoniam vero hoc caſu per diviſionem elicitur æquatio Applicatam $y$ non amplius involvens, perinde eſt, ac ſi $y$ per Functionem rationalem ipſius $x$ exprimi non poſſet. Quoties ſcilicet hujuſmodi æquatio in Factores eſt reſolubilis, pro unoquoque Factore ſeorſim judicium eſt ferendum, unde fit, ut, dum alter Factor interſectiones imaginarias penitus reſpuit, alter eaſdem admittat.

474. His perpenſis, oſtendamus aliquanto diſtinctius, quem-

Digitized by Google

LIB. II. admodum duabus quibuſvis Curvis propoſitis earum interſectiones definiri debeant : atque, cum hæc inveſtigatio ab eliminatione alterius Coordinatæ $y$ pendeat, ad hujus tantum dimenſiones, quas in utraque æquatione obtinet, erit reſpiciendum. Eliminatio enim eodem modo abſolvetur, utcunque altera Coordinata $x$ utramque æquationem afficiat. Sint igitur P, Q, R, S, T &c., itemque $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ &c., Functiones quæcunque rationales ipſius $x$: ac primo quidem ponamus ambas Curvas, quarum interſectiones requiruntur, exprimi his æquationibus

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy = 0$$

multiplicetur prior æquatio per $p$, poſterior per P; atque hæ æquationes a ſe invicem ſubductæ relinquent hanc æquationem ab $y$ prorſus liberam.

$$pQ - Pq = 0.$$

Hujus igitur æquationis, in qua ſola incognita $x$, præter conſtantes, ineſt, omnes radices reales ipſius $x$ præbebunt puncta in Axe, quibus interſectiones imminent. Pro quocunque valore ipſius $x$ invento habebitur valor ipſius $y$ realis ex alterutra æquatione $y = \frac{-P}{Q} = \frac{-p}{q}$, qui interſectionem indicabit; unde, ſi utriuſque Curvæ Applicata $y$ exprimatur per Functionem rationalem ſeu uniformem ipſius $x$, nullæ interſectiones imaginariæ locum inveniunt.

475. Exprimatur jam alterius Curvæ Applicata $y$ per Functionem uniformem ipſius $x$ ut ante; alterius vero per Functionem biformem, ita ut ſit

I.

Digitized by Google

I.

$$P + Q y = 0$$

II.

$$p + qy + ryy = 0,$$

multiplicetur prior æquatio per $p$, poſterior per P, & a ſe invicem ſubtrahantur, factaque diviſione per $y$, erit

III.

$$pQ - Pq - Pry = 0,$$

ſeu

$$(Pq - pQ) + Pry = 0.$$

Nunc multiplicetur prima per $Pr$, & tertia per Q, atque, facta ſubtractione, emerget hæc æquatio ab $y$ libera.

$$PPr - PQq + pQQ = 0.$$

Hujus æquationis ergo ſingulæ radices præbebunt Abſciſſas interſectionibus reſpondentes, quibus cum Applicatæ reales $y = \frac{-P}{Q} = \frac{pQ - Pq}{Pr}$ conveniant, interſectiones erunt reales.

476. Sit, ut ante, alterius Curvæ Applicata æqualis Functioni uniformi ipſius $x$; alterius vero Curvæ Applicata exprimatur per æquationem cubicam; ſeu, ſit Functio triformis ipſius $x$, ita ut binæ æquationes propoſitæ ſint hujuſmodi:

I.

$$P + Q y = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

multiplicetur prior per $p$ & poſterior per P; alteraque ab altera ſubducta ac diviſione per y facta, erit

III.

$$(Pq - pQ) + Pry + Psyy = 0,$$

 in qua ſi loco $y$ valor ex prima $y = \frac{-P}{Q}$ ſubſtituatur & a fractionibus liberetur, proveniet iſta æquatio

$$PQQq = pQ^3 - P^2Qr + P^3s = 0,$$

ſeu

$$Q^3p - PQ^2q + P^2Qr - P^3s = 0,$$

quæ eadem ſtatim prodit, ſi in ſecunda æquatione loco $y$ ejus valor ex prima $\frac{-P}{Q}$ ſubſtituatur. Hujus ergo ultimæ æquationis omnes radices reales ipſius $x$, quoniam ſingulis per primam æquationem $y = \frac{-P}{Q}$ Applicatæ reales reſpondent, totidem interſectiones veras monſtrabunt.

477. Simili modo, ſi alterius Curvæ Applicata $y$ exprimatur per æquationem quatuor pluriumve dimenſionum, dum alterius Applicata manet Functio uniformis ſeu rationalis ipſius $x$, facile incognita $y$ eliminatur. Sint enim ambæ æquationes propoſitæ

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0;$$

atque, cum ex priori ſit $y = \frac{-P}{Q}$, hic valor in altera ſubſtitutus dabit æquationem inter $x$ & cognitas tantum hanc

$$Q^4p - PQ^3q + P^2Q^2r - P^3Qs + P^4t = 0.$$

Hujus ergo æquationis ſingulæ radices ipſius $x$ reales ſuppeditabunt totidem interſectiones veras; proptera quod unicuique Abſciſſæ $x$ ex prima æquatione aſſignari poteſt una Applicata $y$ realis, nempe $y = \frac{-P}{Q}$.

478. Exprimatur jam utriuſque Curvæ Applicata $y$ per

æquationem quadraticam; ac primo quidem puram, ita ut æquationes ambæ ſint hujuſmodi

I.

$$P + Ryy = o$$

II.

$$p + ryy = o$$

ex quibus, eliminando $yy$, ſtatim obtinetur hæc æquatio,

$$Pr - Rp = o,$$

cujus ſingulæ radices reales tum ſolum demonſtrant interſectiones veras, ſi valores ipſius $x$ inventi ita fuerint comparati, ut $\frac{-P}{R}$ vel $\frac{-p}{r}$ fiat quantitas affirmativa; tum enim, ob $yy = \frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$, Applicata $y$ duplicem nanciſcetur valorem realem, alterum affirmativum alterum negativum; ideoque cuique Abſciſſæ $x$ valori ex æquatione $Pr - Rp = o$, invento, binæ reſpondebunt interſectiones, ab Axe utrinque æqualiter diſtantes, quod, cum Axis utriuſque Curvæ Diameter exiſtat, aliter evenire non poteſt. Quod ſi autem quis valor ipſius $x$ ex æquatione $Pr - Rp = o$, inventus expreſſionibus $\frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$ inducat valorem negativum; tum, ob $y$ imaginarium, interſectiones quoque erunt imaginariæ.

479. Adſit nunc in utraque æquatione propoſita quadratica ſecundus quoque terminus continens $y$, ſintque ambæ æquationes propoſitæ iſtæ

I.

$$P + Qy + Ryy = o$$

II.

$$p + qy + ryy = o.$$

Ad incognitam $y$ ex his æquationibus eliminandam multiplicetur primum illa æquatio per $p$, hæc vero per $P$, factaque ſubtractione & diviſione per $y$, erit

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y = 0.$$

Deinde multiplicetur prior æquatio per $r$, poſterior vero per R, alteraque ab altera ſubtracta habebitur

IV.

$$(Pr - Rp) + (Qr - Rq)y = 0.$$

Cum igitur ex his duabus æquationibus ſit

$$y = \frac{Qp - Pq}{Pr - Rp} = \frac{Rp - Pr}{Qr - Rq}$$

erit

$$(Qp - Pq)(Qr - Rq) + (Pr - Rp)^2 = 0,$$

ſeu

$$P^2r^2 - 2PRpr + R^2p^2 + Q^2pr - PQqr - QRpq + PRq^2 = 0.$$

Cujus æquationis ſingulæ radices reales oſtendent totidem interſectiones veras, ſi quidem cuique valori ipſius $x$ valor realis ipſius $y$ convenit ex æquatione III. vel IV. Interim tamen fieri poteſt, ut interſectiones ſint imaginariæ, quod evenit ſi æquationes III. & IV. habeant Factores; ita ut ex iis jam per diviſionem æquatio ab $y$ libera elici queat. Tum enim hæc æquatio in locum ultimæ ſubſtitui, atque ad valores ipſius $y$ inde erutos ex primis æquationibus valores ipſius $y$ reſpondentes quæri debebunt; qui ſi fuerint imaginarii, hoc erit indicio interſectiones eſſe imaginarias.

480. Sit porro in una Curva Applicata $y$ Functio biformis, in altera autem triformis ipſius $x$; ſeu, ſint ambæ Curvarum æquationes propoſitæ hæ

I.

$$P + Qy + Ryy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Multiplicetur prior per $p$, poſterior per P, alteraque ab altera ſubtracta remanebit

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + Psyy = 0,$$

quæ cum prima conjuncta exhibet caſum in præcedente paragrapho pertractatum; ita ut, quæ ibi erant $p, q, r$, hic ſint $Pq - Qp$, $Pr - Rp$, & $Ps$: ideoque reperietur hic

$$y = \frac{PQq - QQp - PPr + PRp}{PPs - PRq + QRp},$$

&

$$y = \frac{PRq - QRp - PPs}{PQs - PRr + RRp};$$

unde fit

$$0 = (PRq - QRp - PPs)^2 + (PQs - PRr + RRp)$$
$$(PQq - Q^2p - P^2r + PRp),$$

quæ æquatio evoluta dat

$$P^4s^2 \begin{array}{l} \\ -2P^3Rqs \\ -P^3Qrs \\ +P^3Rrr \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} +3P^2QRps \\ +P^2R^2qq \\ +P^2Q^2qs \\ -P^2QRqr \\ -2P^2R^2pr \end{array} \begin{array}{l} -PQR^2pq \\ -PQ^3ps \\ +PQ^2Rpr \\ +PR^3pp \end{array} \begin{array}{l} +Q^2R^2p^2 \\ -Q^2R^2p^2 \end{array} = 0$$

quæ, ob ultimum terminum evaneſcentem, diviſibilis eſt per P, ſicque prodibit hæc æquatio

$$\begin{array}{l} +P^3s^2 - 2P^2Rqs - P^2Qrs + 3PQRps + PQ^2qs - Q^3ps + R^3p^2 \\ +P^2Rr^2 - PQRqr - 2PR^2pr + Q^2Rpr + PR^2q^2 - QR^2pq \end{array} = 0.$$

Ex cujus æquationis radicibus realibus interſectiones cognoſcentur, ſi quidem ipſis valores reales ipſius $y$ reſpondere deprehendantur.

481. Exprimatur nunc utraque Applicata per æquationem cubicam, ſintque ambæ æquationes propoſitæ hæ

I.

$$P + Qy + Ryy + Sy^3 = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Digitized by Google

LIB. II. Multiplicetur prior per $p$, poſterior per P, factaque ſubtractione alterius ab altera, remanebit

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)\,y + (Ps - Sp)\,yy = 0.$$

Deinde multiplicetur prior per $s$, poſteriorque per S, factaque ſubtractione remanebit

IV.

$$(Sp - Ps + (Sq - Qs)\,y + (Sr - Rs)\,yy = 0.$$

Hæ æquationes III. & IV. ſi comparentur cum binis æquationibus §. 479. tractatis, fiet ut ſequitur

$$\begin{array}{l|l} P = Pq - Qp & p = Sp - Ps \\ Q = Pr - Rp & q = Sq - Qs \\ R = Ps - Sp & r = Sr - Rs \end{array}$$

Quibus in æquatione finali ſubſtitutis, emerget

$$\begin{aligned} &+ (Pq - Qp)^2 (Sr - Rs)^2 - 2 (Pq - Qp)(Ps - Sp)(Sp - Ps)(Sr - Rs) \\ &+ (Ps - Sp)^2 (Sp - Ps)^2 + (Pr - Rp)^2 (Sp - Ps)(Sr - Rs) - \\ &\quad (Pq - Qp)(Pr - Rp)(Sq - Qs)(Sr - Rs) - (Pr - Rp)(Ps - Sp) \\ &\quad (Sp - Ps)(Sq - Qs) + (Pq - Qp)(Ps - Sp)(Sq - Qs)^2 = 0. \end{aligned}$$

In hac æquatione ſeptem ſunt termini, qui omnes ſunt diviſibiles per $Sp - Ps$, præter primum & quintum: qui autem, ſi conjungantur, duos habebunt Factores, alterum $(Pq - Qp)$ $(Sr - Rs)$, alterum vero $(Pq - Qp)\,(Sr - Rs) - (Pr - Rp)\,(Sq - Qs)$, qui poſterior reſolutus fit $= PQrs + RSpq - PRqs - QSpr$ ideoque, $= (Sp - Ps)$ $(Rq - Qr)$: unde termini I. & V. coaleſcent in hanc formam $(Pq - Qp)\,(Sr - Rs)\,(Sp - Ps)\,(Rq - Qr)$ quoque per $Sp - Ps$ diviſibilem. Quocirca orietur hæc æquatio

Digitized by Google

$$0 = (Pq - Qp)(Sr - Rs)(Rq - Qr) + 2(Pq - Qp)(Sp - Ps)(Sr - Rs) + (Sp - Ps)^3 + (Pr - Rp)^2 (Sr - Rs) + (Pr - Rp)(Sp - Ps)(Sq - Qs) - (Pq - Qp)(Sq - Qs)^2$$ CAP. XIX.

quæ evoluta dabit

$$+ S^3p^3 - 3PS^2p^2s + P^2Sr^3 + 2PR^2prs - P^2Rr^2s + P^2Qrss + PRSqqr$$
$$- P^3s^3 + 3P^2Sps^2 - R^3p^2s - 2PRSpr^2 + R^2Sp^2r - RSSp^2q - QQRprs$$
$$- PR^2qqs - PQSqrr + PQRqrs + 3PSSpqr - 3PPSqrs + PQSprs$$
$$+ Q^2Sprr + QRRpqs - QRSpqr - 3PQRpss + 3QRSpps - PRSpqs$$
$$+ 2P^2Rqss + 2PQSqqs - PSSq^3 - PQ^2qss - 2QS^2ppr -$$
$$2QQSpqs + Q^3pss + QS^2pqq = 0.$$

482. Quo methodus iſta eliminandi $y$ ex duabus æquationibus altiorum graduum clarius percipiatur, ponamus utramque æquationem propoſitam eſſe quarti ordinis

I.

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + Ty^4 = 0$$

II.

$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0,$$

multiplicetur æquatio prior per $p$, poſterior per P, atque poſt ſubtractionem relinquetur

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)y^2 + (Pt - Tp)y^3 = 0.$$

Deinde multiplicetur æquatio I. per $t$, poſterior II. per T, &, facta ſubtractione, remanebit

IV.

$$(Pt - Tp) + (Qt - Tq)y + (Rt - Tr)y^2 + (St - Ts)y^3 = 0.$$

Ponatur nunc brevitatis gratia

$$\begin{array}{l|l|l} Pq - Qp = A & Pt - Tp = a & Sq - Qs = \alpha \\ Pr - Rp = B & Qt - Tq = b & Rq - Qr = \beta \\ Ps - Sp = C & Rt - Tr = c & \\ Pt - Tp = D & St - Ts = d & \end{array}$$

ubi notandum eſt eſſe non ſolum $a = D$; ſed eſſe quoque

$$Ad - Cb = (Pt - Tp)(Sp - Qs = D\alpha$$
$$Ac - Bb = (Pt - Tp)(Rq - Qr = D\beta.$$

His ergo ſubſtitutionibus æquationes III. & IV. induent has formas

III.

$$A + By + Cyy + Dy^3 = 0$$

IV.

$$a + by + cyy + dy^3 = 0.$$

Nunc porro æquationes hæ multiplicentur reſpectivè per $d$ & D, & a ſe invicem ſubtrahantur, prodibitque

V.

$$(Ad - Da + (Bd - Db)y + (Cd - Dc)y^2 = 0.$$

Tum eædem illæ æquationes multiplicentur per $a$ & A, & poſt ſubtractionem relinquetur

VI.

$$(Ab - Ba + (Ac - Ca)y + (Ad - Da)y^2 = 0.$$

Jam ſtatuatur iterum brevitatis gratia

| | | |
|---|---|---|
| $Ab - Ba = E$ | $Ad - Da = e$ | |
| $Ac - Ca = F$ | $Bd - Db = f$ | $Cb - Bc = \zeta$ |
| $Ad - Da = G$ | $Cd - Dc = g$ | |

eritque $G = e$; & $Eg - Ff = G\zeta$; ita ut & $Eg - Ff$ ſit diviſibile per G. Hinc ſequentes habebimus æquationes

V.

$$E + Fy + Gyy = 0$$

VI.

$$e + fy + gyy = 0.$$

Ex quibus per ſimilem operationem eliciuntur iſtæ

VII.

$$(Ef - Fe) + (Eg - Ge)y = 0$$

VIII.

$$(Eg - Ge) + (Fg - Gf)y = 0.$$

Denique

Denique iterum ponatur brevitatis gratia

| | |
|---|---|
| $Ef - Fe = H$ | $Eg - Ge = h$ |
| $Eg - Ge = I$ | $Fg - Gf = i$ |

ita ut ſit $I = h$, habebiturque

VII.

$$H + Iy = 0$$

VIII.

$$h + iy = 0,$$

ex quibus tandem colligitur hæc æquatio ab $y$ libera

$$Hi - Ih = 0.$$

In qua ſi valores præcedentes ſucceſſive reſtituantur, obtinebitur æquatio quam ſolæ Functiones P, Q, R, &c. $p, q, r$, &c. primarum æquationum ingredientur. Æquatio vero inter E, F, G, $e, f, g$, diviſibilis erit per $G = e$; atque, ſi procedatur ad litteras A, B, C, D, $a, b, c, d$, æquatio reſultans diviſionem admittet per $D' = a'$, ita, ut in æquatione ultima quivis terminus octo tantum complexurus ſit litteras, quatuor majuſculas, totidemque minuſculas. Hoc itaque modo in genere, quotcunque dimenſiones ipſius $y$ utraque æquatio propoſita contineat, ſemper incognita $y$, poterit eliminari, atque æquatio, quæ ſolam incognitam $x$ involvat, inveniri.

483. Etſi hujus methodi ex duabus æquationibus unam incognitam eliminandi uſus latiſſime patet, tamen aliam adhuc methodum ſubjungam, quæ tot repetitis ſubſtitutionibus non indigeat. Sint igitur propoſitæ duæ æquationes quotcunque dimenſionum

I.

$$Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \&c. = 0$$

II.

$$py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} + sy^{n-3} + \&c. = 0,$$

LIB. II. ex quibus unam æquationem, in qua $y$ amplius non inſit, conflari oporteat. Ad hoc multiplicetur æquatio poſterior per hanc quantitatem

$$Py^{k-n} + Ay^{k-n-1} + By^{k-n-2} + Cy^{k-n-3} + \&c.,$$

quæ $k-n$ litteras arbitrarias A, B, C, &c., continet. Æquatio vero prior multiplicetur per hanc quantitatem

$$py^{k-m} + ay^{k-m-1} + by^{k-m-2} + cy^{k-m-3} + \&c.,$$

in qua $k-m$ litteræ arbitrariæ $a$, $b$, $c$, &c., inſunt. Tum ambo producta ita inter ſe æqualia ponantur ut omnes termini qui continent poteſtates ipſius $y$ ſe mutuo deſtruant, terminique ultimi ipſa $y$ carentes æquationem quæſitam exhibeant. Summæ autem poteſtates jam ſponte ſe deſtruunt, in utroque enim producto ſummus terminus erit $Ppy^k$; ſuperſunt ergo adhuc $k-1$ termini, qui deſtrui debebunt, ad quod totidem litteræ arbitrariæ ſunt determinandæ. Numerus autem litterarum arbitrariarum ſic introductarum eſt $2k-m-n$, qui cum æqualis eſſe debeat $k-1$, fiet $k = m+n-1$.

484. Hanc ob rem prima æquatio multiplicetur per hanc quantitatem indeterminatam

$$py^{n-1} + ay^{n-2} + by^{n-3} + cy^{n-4} + \&c.,$$

ſecunda vero æquatio multiplicetur per hanc

$$Py^{m-1} + Ay^{m-2} + By^{m-3} + Cy^{m-4} + \&c.$$

Singuliſque terminis, in quibus ſimiles ipſius $y$ occurrunt poteſtates, inter ſe coæquatis, naſcentur ſequentes æquationes

$$Pp = Pp$$
$$Pa + Qp = pA + qP$$
$$Pb + Qa + Rp = pB + qA + rP$$
$$Pc + Qb + Ra + Sp = pC + qB + rA + sP$$
$$\&c.$$

Digitized by Google

Hujuſmodi ergo æquationes, prima $Pp = Pp$ ſimul computata, habebuntur numero $m + n$, ex quibus ſi litteræ arbitrariæ A, B, C, &c. $a$, $b$, $c$, &c. determinentur, ultima æquatio nonniſi litteras datas P, Q, R, &c. $p$, $q$, $r$, &c. continebit, ſicque quæſito ſatisfaciet.

485. Hæc autem litterarum arbitrariarum determinatio facilius expedietur, ſi membra uniuſcujuſque æquationis æqualia ponantur novis indeterminatis quantitatibus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, &c.; quod ex ſequenti exemplo clarius apparebit.

Sint propoſitæ hæ æquationes duæ

I.

$$Py^2 + Qy + R = 0$$

II.

$$py^3 + qy^2 + ry + s = 0,$$

multiplicetur ergo prima per $py^2 + ay + b$, & altera per $Py + A$; prodibuntque hæ æqualitates

$$\begin{aligned} Pp &= Pp \\ Pa + Qp &= pA + qP = \alpha \\ Pb + Qa + Rp &= qA + rP = \beta \\ Qb + Ra &= rA + sP \\ Rb &= sA \end{aligned}$$

Æquatione prima identica omiſſa, ex ſecunda fit

$$a = \frac{\alpha - Qp}{P}$$

$$A = \frac{\alpha - qP}{p}.$$

Ex tertia vero obinebitur

$$b = \frac{\beta}{P} - \frac{Qa}{P} - \frac{Rp}{P} = \frac{\beta}{P} - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P}$$

&

$$\beta = \frac{\alpha q}{p} - \frac{qqP}{p} + rP,$$

LIB. II.

quo valore ipſius β ſubſtituto, erit

$$b = \frac{\alpha q}{Pp} - \frac{qq}{p} + r - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P},$$

ſeu

$$b = \frac{\alpha(Pq - Qp)}{P^2 p} + \frac{(Q^2 p^2 - P^2 q^2)}{P^2 p} + \frac{(Pr - Rp)}{P};$$

qui valor, in quarta æquatione ſubſtitutus, dabit

$$\frac{\alpha Q(Pq - Qp)}{P^2 p} - \frac{Q(Pq - Qp)(Qp + Pq)}{P^2 p} + \frac{Q(Pr - Rp)}{P} + \frac{\alpha R}{P} - \frac{RQp}{P} = \frac{\alpha r}{p} - \frac{Prq}{p} + Ps,$$

ſeu, per $P^2 p$ multiplicando,

$$\alpha Q(Pq - Qp) + \alpha P(Rp - Pr) - Q(Pq - Qp)(Pq + Qp) + PQp(Pr - 2Rp) + P^2 qr - P^2 ps = 0.$$

Ergo fiet

$$\alpha = \frac{P^2 Q q^2 - Q^3 pp - P^2 Q pr + 2PQRp^2 - P^3 qr + P^3 ps}{PQq - Q^2 p + PRp - P^2 r}.$$

Ultima vero æquatio dabit

$$\frac{\alpha R(Pq - Qp)}{P^2 p} - \frac{R(P^2 q^2 - Q^2 p^2)}{P^2 p} + \frac{R(Pr - Rp)}{P} = \frac{\alpha S}{p} - \frac{Pqs}{p},$$

ex qua quoque elicitur

$$\alpha = \frac{P^2 R q^2 - Q^2 R P^2 - P^2 R pr + PR^2 p^2 - P^3 qs}{PRq - QRp - P^3 s},$$

qui gemini ipſius α valores præbebunt æquationem quæſitam; quæ tandem reducetur ad eandem formam, quam ſupra §. 480. pro eodem caſu invenimus.

## CAPUT XX.

### *De Conſtructione æquationum.*

486. Quæ in ſuperiori Capite de interſectione Curvarum ſunt expoſita potiſſimum ad conſtructiones æquationum altiorum graduum traduci ſolent. Cum enim duabus Curvis propoſitis æquationem invenerimus, cujus radices interſectionum locos exhibeant; ita viciſſim interſectiones duarum Curvarum inſervire poſſunt radicibus æquationum indicandis, Atque hic modus maximam affert utilitatem ſi radices cujuſpiam æquationis per Lineas exprimi debeant; deſcripta, namque utraque Curva ad hunc finem accommodata, interſectiones facile notabuntur, unde ſi ad Axem Applicatæ demittantur, Abſciſſæ præbebunt veras æquationis radices. Si autem incommodum ſupra memoratum locum habeat, tum quidem omnes Abſciſſæ ſic inventæ radices præbebunt, at fieri poterit ut æquatio propoſita plures complectatur radices, quam per talem conſtructionem reperiuntur.

487. Cum igitur propoſita fuerit æquatio algebraïca incognitam $x$ involvens, cujus radices aſſignari oporteat, duæ quærendæ ſunt Lineæ curvæ, ſeu duæ æquationes inter binas variabiles $x$ & $y$, quæ ita ſint comparatæ, ut, ſi ex iis Applicata $y$ eliminetur, ipſa æquatio propoſita reſultet. Quo facto iſtæ duæ Curvæ ſuper communi Axe atque ad idem Abſciſſarum initium deſcribantur, punctaque, quibus ſe mutuo interſecabunt, notentur. Tum ex his interſectionum punctis ad Axem Applicatæ normales demittantur, quæ in Axe exhibebunt Abſciſſas ſingulis æquationis propoſitæ radicibus æquales. Hoc itaque modo ſingularum radicum quæſitarum valores veri aſſignabuntur, niſi forte eveniat, ut æquatio plures contineat radices, quam interſectiones adeſſe deprehendantur.

LIB. II. 488. Antequam autem modum tradam, quo binæ illæ Curvæ conſtructioni datæ æquationis inſervientes inveniri queant, a poſteriori eas æquationes perpendamus, quarum reſolutio ex datis duabus Curvis abſolvitur. Ac primo quidem ſint ambæ Lineæ reſolventes rectæ $EM$, $FM$, ſeſe in puncto $M$ interſecantes. Sumatur recta $EF$ pro Axe, in eoque punctum $A$ pro initio Abſciſſarum, unde educta normalis $ABC$ rectam priorem in $B$, poſteriorem in $C$ ſecet. Sit $AE=a$, $AF=b$; $AB=c$; $AC=d$; tum vero ponatur Abſciſſa $AP=x$; Applicata $PM=y$; eritque pro priori recta $EM$ $a:c=a+x:y$, ſeu $ay=c(a+x)$; & pro altera $b:d=b-x:y$, ſeu $by=d(b-x)$. Ex his æquationibus ſi eliminetur $y$, prodibit $bc(a+x)=ad(b-x)$ ſeu $x=\frac{abd-abc}{bc+ad}=\frac{ab(d-c)}{bc+ad}$. Per interſectionem ergo duarum Linearum rectarum conſtrui poterit æquatio ſimplex $x=\frac{ab(d-c)}{bc+ad}$; ad quam formam omnes omnino æquationes ſimplices revocari poſſunt.

TAB. XXIII. Fig. 97.

489. Lineas rectas ratione facilitatis deſcribendi excipit Circulus, & hanc ob rem videamus cujuſmodi æquationes per interſectionem rectæ & Circuli conſtrui queant. Sit igitur, ſumta $AP$ pro Axe & $A$ pro Abſciſſarum initio, deſcripta Linea recta $EM$: poſitiſque $AE=a$, $AB=b$, & Coordinatis $AP=x$, $PM=y$; erit $a:b=a+x:y$; ideoque $ay=b(a+x)$, quæ eſt æquatio pro Linea recta. Deinde ſit Radius Circuli $CM=c$, demiſſoque ex ejus Centro $C$ in Axem perpendiculo $CD$, vocetur $AD=f$, $CD=g$; erit $DP=x-f$, & $PM-CD=y-g$. Jam, cum ſit ex natura Circuli $CM^2=DP^2+(PM-CD)^2$, erit æquatio pro Circulo $cc=xx-2fx+ff+yy-2gy+gg=(x-f)^2+(y-g)^2$. At æquatio pro recta dat $y=\frac{ab+bx}{a}$, unde fit $y-g=\frac{a(b-g)+bx}{a}=b-g+\frac{bx}{a}$,

TAB. XXIII. Fig. 98.

quo ipſius $y$ valore in altera æquatione ſubſtituto, emerget CAP. XX.

$$cc = xx - 2fx + ff + (b-g)^2 + \frac{2b(b-g)x}{a} + \frac{bbxx}{aa},$$

ſeu

$$\left.\begin{matrix} +aa \\ +bb \end{matrix}\right\} xx \left.\begin{matrix} +2ab(b-g) \\ -2aaf \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +aa(b-g)^2 \\ +aaff \\ -aacc \end{matrix}\right\} = 0,$$

cujus ergo æquationis radices invenientur per interſectiones Rectæ & Circuli, ita ut, demiſſis ex interſectionibus $M$ & $m$ in Axem perpendiculis $MP$, $mp$, valores ipſius $x$ futuri ſint $AP$ & $Ap$.

490. Quoniam in hac æquatione omnes æquationes quadraticæ continentur, hinc conſtructio generalis æquationum quadraticarum adornari poterit. Sit ſcilicet propoſita hæc æquatio quadratica

$$Axx + Bx + C = 0,$$

quæ ad ſuperiorem formam primum ita reducatur ut primi termini conveniant; multiplicando per $\frac{aa+bb}{A}$,

$$(aa+bb)xx + \frac{B(aa+bb)x}{A} + \frac{C(aa+bb)}{A} = 0.$$

Jam coæquatio reliquorum terminorum dabit

$$2Aab(b-g) - 2Aaaf = B(aa+bb)$$

ideoque fiet

$$af = b(b-g) - \frac{B(aa+bb)}{2Aa},$$

Unde, cum ſit

$$aa(b-g)^2 + aaff - aacc = \frac{C(aa+bb)}{A},$$

erit

$$(aa+bb)(b-g)^2 - \frac{Bb(b-g)(aa+bb)}{A} + \frac{BB(aa+bb)^2}{4A^2a^2} - aacc = \frac{C(aa+bb)}{Aa}$$

ideoque

 $(b-g)^2 = \frac{Bb(b-g)}{Aa} - \frac{B(aa+bb)}{4A^2a^2} + \frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A}$,

ergo

$$b-g = \frac{Bb}{2Aa} \pm \surd\left(\frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4AA}\right).$$

Manent igitur tres quantitates $a$, $b$, & $c$, adhuc indeterminatæ, quas autem ita accipi oportet, ut $\frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4AA}$, fiat quantitas affirmativa, quia alioquin $b-g =$ AB — CD, hincque CD, fieret quantitas imaginaria.

491. Nihil ergo impedit quominus ponamus $b = 0$, eritque $g = \surd\left(cc - \frac{BB+4AC}{4AA}\right)$ & $f = \frac{-B}{2A}$. Deinde vero, cum æquatio propoſita $Axx + Bx + C = 0$, radices nullas habeat reales, niſi ſit BB major quam 4 AC, erit hoc caſu $\frac{BB-4AC}{4AA}$ quantitas affirmativa, cui ſi $cc$ ponatur æquale, ut ſit $c = \frac{\surd(BB-4AC)}{2A}$, fiet quoque $g = 0$, & $a$ prorſus ex calculo excedit. Linea ergo recta $EM$ in ipſum Axem $AP$ incidet, & Centrum Circuli $C$ collocari debebit in puncto $D$ exiſtente $AD = \frac{-B}{2A}$, ex quo Centro ſi Circulus deſcribatur Radio $c = \frac{\surd(BB-4AC)}{2A}$, hujus interſectiones cum ipſo Axe oſtendent æquationis propoſitæ radices. Ne autem ad hoc conſtructione formulæ irrationalis opus ſit, ponatur $g = c - \frac{k}{2A}$, ut ſit $cc - \frac{2ck}{2A} + \frac{kk}{4AA} = cc - \frac{BB+4AC}{4AA}$, erit $c = \frac{kk+BB-4AC}{4kA}$, & $g = \frac{BB-4AC-}{4kA}$. In noſtro ergo arbitrio determinatio quantitatis $k$ relinquitur; qua utcunque aſſumta, quia recta $CM$ in ipſum Axem incidit, Circulus ſequenti modo deſcribi debebit. Sumta $AD = \frac{-B}{2A}$

$=\frac{-B}{2A}$, capiatur perpendiculum $CD=\frac{BB-4AC-kk}{4Ak}$, & Centro $C$ deſcribatur Circulus cujus Radius $=\frac{BB-4AC+kk}{4Ak}$; hujuſque interſectiones cum Axe oſtendent radices æquationis propoſitæ. Quòd ſi ergo ſtatuatur $k=-B$, ſumta $AD=\frac{-B}{2A}$, capiatur $CD=\frac{C}{B}$, & Circuli Centro $C$ deſcribendi Radius erit $=\frac{-BB+2AC}{2AB}=\frac{-B}{2A}+\frac{C}{B}$, ex quo Radius Circuli erit $=AD+CD$; quæ conſtructio pro praxi commodiſſima videtur.

492. Conſideremus jam duos Circulos ſe interſecantes: ſitque pro primo $AD=a$, $CD=b$, & ejus Radius $CM=c$; eritque, poſitis $AP=x$ & $PM=y$, $DP=a-x$, $CD-PM=b-y$; ideoque, ex natura Circuli, habebitur TAB. XXIV. Fig. 99.

$$xx-2ax+aa+yy-2by+bb=cc.$$

Simili modo pro altero Circulo ſit $Ad=f$, $dc=g$, ejuſque Radius $cM=h$, eritque

$$xx-2fx+ff+yy+2gy+gg=hh,$$

quibus æquationibus a ſe invicem ſubtractis, remanebit

$$2(f-a)x+aa-ff-2(b+g)y+bb-gg=cc-hh,$$

ergo

$$y=\frac{aa+bb-ff-gg-cc+hh-2(a-f)x}{2(b+g)};$$

hincque

$$b-y=\frac{bb+2bg-aa+ff+gg+cc-hh+2(a-f)x}{2(b+g)},$$

&

$$a-x=\frac{2a(b+g)-2(b+g)x}{2(b+g)}.$$

Cum igitur ſit $(a-x)^2+(b-y)^2=cc$, erit, facta ſubſtitutione,

LIB. II.

$$\begin{matrix} +4(a+f)^2 \\ +4(b+g)^2 \end{matrix}\, xx \begin{matrix} -4(a+f)(b+g)^2 \\ -4(a-f)(aa-ff) \\ +4(a-f)(cc-hh) \end{matrix}\, x \begin{matrix} +(b+g)^4 \\ +2(aa-cc)(b+g)^2 \\ +2(ff-hh)(b+g)^2 \\ +(aa-cc-ff+hh)^2 \end{matrix} = 0.$$

Hujus ergo æquationis ope infinitis modis conſtrui poterit æquatio $Axx + Bx + C = 0$; ſimul vero intelligitur æquationem quadratica altiorem per interſectionem duorum Circulorum conſtrui non poſſe, propterea quod duo Circuli ſe mutuo in pluribus quam duobus punctis interſecare nequeunt. Cum igitur eadem æquatio quadratica conſtrui poſſit per interſectionem Rectæ & Circuli, hæc conſtructio illi, quæ duos Circulos requirit, merito præfertur, niſi forte in caſibus quibuſdam ſingularibus facilis Linearum $a$, $b$, $f$, $g$, $c$ & $h$ determinatio ſponte ſe prodat.

TAB. XXIV. Fig. 100.

493. Interſecetur nunc Circulus a Parabola: ſit ſcilicet, demiſſo ex Centro Circuli $C$ in Axem $AP$ perpendiculo $CD$, $AD = a$, $CD = b$, & Radius Circuli $CM = c$, erit inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, $PM = y$, æquatio pro Circulo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = cc$. Parabolæ vero Axis $FB$ ſtatuatur ad Axem hic aſſumtum $AP$ normalis: ſitque $AE = f$, $EF = g$, & Parameter Parabolæ $= 2h$; erit, ex natura Parabolæ, $EP^2 = 2h(EF + PM)$ ſeu in ſymbolis $(x - f)^2 = 2h(g + y)$, unde erit $y = \frac{(x-f)^2}{2h} - g$ & $y - b = \frac{(x-f)^2}{2h} - (b + g)$. Qui valor ſi in priori æquatione ſubſtituatur, eliminabitur $y$, eritque

$$\frac{(x-f)^4}{4hh} - \frac{(b+g)(x-f)^2}{h} + (b+g)^2 + (x-a)^2 = cc$$

ſive

$$x^4 - 4fx^3 \begin{matrix} +6ff \\ -4h(b+g) \\ +4hh \end{matrix}\, x^2 \begin{matrix} -4f^3 \\ +4fh(b+g) \\ -8ahh \end{matrix}\, x \begin{matrix} +f^4 \\ -4ffh(b+g) \\ +4hh(b+g)^2 \\ +4aahh \\ -4cchh \end{matrix} = 0$$

cujus æquationis radices erunt Abſciſſæ $AP$, $Ap$, $Ap$, $Ap$, unde Applicatæ per interſectionum puncta $M$, $m$, $m$, $m$, tranſeunt. 

494. In hac æquatione ſex inſunt conſtantes $a, b, c, f, g$, & $h$; quarum vero binæ $b + g$ pro una ſunt reputandæ, ita ut quinque ſolum, ponendo $b + g = k$, ineſſe cenſendæ ſint. Poſito ſcilicet $CD + EF = b + g = k$, ſequens habebitur æquatio

$$x^4 - 4fx^3 \begin{array}{l} + 6ff \\ - 4hk \\ + 4hh \end{array} xx \begin{array}{l} - 4f^3 \\ + 4fhk \\ - 8ahh \end{array} x \begin{array}{l} + f^4 \\ - 4ffhk \\ + 4hhkk \\ + 4aahh \\ - 4cchh \end{array} = 0.$$

Ad hanc autem formam omnis æquatio biquadratica revocari poteſt; ſit enim propoſita hæc æquatio

$$x^4 - Ax^3 + Bxx - Cx + D = 0$$

erit, comparatione inſtituta,

$$4f = A \text{ ſeu } f = \frac{1}{4}A$$

$$6ff - 4hk + 4hh = B, \text{ ſeu } \frac{3}{8}AA - 4hk + 4hh = B.$$

unde fit

$$k = \frac{3AA}{32h} + h - \frac{B}{4h},$$

$$4f^3 - 4fhk + 8ahh = C$$

ſive

$$\frac{1}{16}A^3 - \frac{3}{32}A^3 - Ahh + \frac{1}{4}AB + 8ahh = C$$

ergo

$$a = \frac{A^3}{256hh} + \frac{A}{8} - \frac{AB}{32hh} + \frac{C}{8hh}.$$

Denique eſt

$$(ff - 2hk)^2 + 4aahh - 4cchh = D.$$

At eſt



Digitized by Google

$$ff - 2hk = \frac{B}{2} - 2hh - \frac{AA}{16},$$

&

$2ah = \frac{A^3}{128h} + \frac{Ah}{4} - \frac{AB}{16h} + \frac{C}{4h}$, quibus valoribus ſubſtitutis emerget æquatio $c$ & $h$ involvens, quas propterea convenientiſſime inde definiri oportet, ita ſcilicet ut utraque valorem obtineat realem.

495. Quoniam vero in omni æquatione biquadratica ſecundus terminus facile tolli poteſt; ponamus ipſum jam eſſe ſublatum, ideoque conſtruendam eſſe hanc æquationem

$$x^4 \star + Bxx - Cx + D = 0.$$

Erit ergo primum, $f = 0$; ſecundo $k = h - \frac{B}{4h}$; tertio $a = \frac{C}{8hh}$; atque, ob $2hk - ff = 2hh - \frac{B}{2}$, & $2ah = \frac{C}{4h}$, quarto $4h^4 - 2Bhh + \frac{1}{4}BB + \frac{CC}{16hh} - 4cchh = D$, unde fit $64cch^4 = CC + 4BBhh - 32Bh^4 + 64h^6 - 16Dhh$; ideoque $8chh = \sqrt{(4hh(B - 4hh)^2 + CC - 16Dhh)}$. Quoniam vero hoc imprimis eſt efficiendum ut tam $c$ quam $h$ obtineant valores reales, ponatur $c = h - \frac{B+q}{4h}$, eritque

$$CC - 16Dhh + 8Bhhq - 32h^4q - 4hhqq = 0.$$

Quo igitur quæſito ſatisfaciamus, duo caſus ſunt diſtinguendi, alter quo D eſt quantitas negativa, alter quo D eſt quantitas affirmativa. Sit igitur

I.

D quantitas affirmativa $= +EE$, ita ut conſtrui debeat hæc æquatio

$$x^4 \star + Bx^2 - Cx + EE = 0,$$

ponatur ad hoc $q = 0$, ut ſit $c = \frac{4hh - B}{4h}$, fietque $hh =$

$\frac{CC}{16EE}$ & $h = \frac{C}{4E}$; unde fit $c = \frac{CC - 4BE}{4CE}$, & porro $k = c = \frac{CC - 4BE}{4CE}$; $a = \frac{2EE}{C}$ & $f = 0$.

II.

Sit autem D quantitas negativa, puta $D = -EE$, ut conſtrui debeat hæc æquatio

$$x^4 * + Bx^2 - Cx - EE = 0,$$

fiet $64cch^4 = CC + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEhh$; quæ æquatio realem pro $c$ valorem præbet, quicquid pro $h$ aſſumatur: fiet enim $c = \frac{\sqrt{(CC + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEhh)}}{8hh}$, atque $h$ pro lubitu aſſumi poteſt; quovis igitur caſu ita aſſumatur, ut facilima ipſius $c$ conſtructio inde conſequatur. Quo facto erit, ut ante, $AE = f = 0$, $CD + EF = k = \frac{4hh - B}{4h}$ & $AD = a = \frac{C}{8hh}$. Si ponatur $E = 0$, orietur conſtructio æquationis cubicæ

$$x^3 * + Bx - C = 0.$$

Hacque conſtructione nititur regula BACKERI vulgo ſatis nota.

496. Si ſumantur duæ quæcunque Lineæ ſecundi ordinis ſeu Sectiones conicæ, quarum æquationes ad communem Axem idemque Abſciſſarum initium relatæ ſint

$$ayy + byx + cxx + dy + ex + f = 0$$
&
$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0.$$

Ex quibus, ſi methodo ſupra tradita $y$ eliminetur, quod fiet iſtas æquationes comparando cum illis in §. 479. tractatis, ſcilicet

Digitized by Google

$$P + Qy + Ryy = 0$$
&
$$p + qy + ryy = 0,$$

ſient P & $p$ Functiones ſecundi ordinis ipſius $x$, Q & $q$ Functiones primi ordinis, & R & $r$ erunt conſtantes, unde colligitur æquatio reſultans fore biquadratica. Atque adeo per interſectiones duarum quarumvis Sectionum conicarum altioris gradus æquationes conſtrui nequeunt, quam biquadraticæ, quas autem per Circulum & Parabolam conſtrui poſſe vidimus. Hoc idem vero intelligere licet ex natura Linearum ſecundi ordinis, quæ a recta Linea in duobus punctis ſecari poſſunt; unde duæ rectæ quatuor interſectiones formare poterunt, at duæ Lineæ rectæ junctim conſideratæ ſpeciem conſtituunt Linearum ſecundi ordinis; unde patet duas Lineas ſecundi ordinis ſe mutuo in quatuor punctis interſecare poſſe.

497. Adhibeantur ad interſectiones efficiendas duæ Lineæ, altera ſecundi, altera vero tertii ordinis, quæ exprimantur his æquationibus

$$P + Qy + Ryy = 0$$
&
$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Erit ergo P Functio duarum dimenſionum ipſius $x$, Q Functio unius dimenſionis, & R conſtans; tum vero $p$ Functio trium dimenſionum, $q$ duarum, $r$ unius dimenſionis & $s$ conſtans. Quarum ratio ſi in æquatione poſt eliminationem ipſius $y$ orta (480.) habeatur, patebit eam fore ordinis ſexti; quare per interſectiones Lineæ tertii ordinis cum Sectione conica altiores æquationes, quam ſextæ poteſtatis conſtrui non poterunt: quod idem ex natura utriuſque ordinis patet, cum enim Lineæ tertii ordinis a Linea recta in tribus punctis interſecentur, eædem a duabus rectis, quæ junctim ſumptæ ſpeciem Linearum ſecundi ordinis conſtituunt, in ſex punctis interſecabuntur.

Digitized by Google

498. Si tam eliminationes ſupra expoſitas, quam hoc ratiocinium ab interſectione rectarum petitum, ad altiores ordines transferamus, patebit per inteſectiones duarum Linearum tertii ordinis conſtrui poſſe æquationes nonæ poteſtatis; per interſectiones duarum Linearum quarti ordinis autem æquationes poteſtatem ſextam decimam non ſuperantes. Atque in genere per duarum Linearum curvarum interſectiones, quarum altera ſit ordinis $m$ altera ordinis $n$, conſtrui poterunt omnes æquationes poteſtatem $mn$ non excedentes. Sic ad æquationem centeſimæ poteſtatis conſtruendam opus erit vel duabus Lineis decimi ordinis, vel duabus, quarum altera ſit quinti altera viceſimi ordinis, & ita porro; reſolvendo numerum 100. in duos Factores. Quod ſi autem æquationis conſtruendæ maxima poteſtas exponatur numero primo, vel alio commodos Factores non admittente, tum in ejus locum alius numerus major Factores habens idoneos ſubſtituatur; quibus enim binis Curvis æquationes majoris poteſtatis conſtrui poſſunt, iiſdem quoque æquationes inferioris cujuſque gradus conſtruentur. Sic ad æquationem gradus triceſimi noni adhiberi poterunt duæ Curvæ, altera ſexti altera ſeptimi ordinis; quia duabus hujuſmodi Curvis æquatio quadrageſimi ſecundi gradus conſtrui poteſt, hæcque conſtructio ſimplicior eſt cenſenda, quam ſi altera Curva ordinis tertii, altera decimi tertii aſſumeretur.

499. Ex his igitur perſpicuum eſt unamquamque æquationem pluribus, imo innumerabilibus, modis per interſectiones duarum Curvarum ita conſtrui poſſe, ut ejus radices reales aſſignentur. Ex quibus infinitis modis eum potiſſimum eligi conveniet, qui abſolvitur Lineis curvis cum ſimpliciſſimis tum deſcriptu facillimis; imprimis vero in id erit incumbendum, ut per interſectiones omnes radices reales exhibeantur; quod obtinetur ſi ejuſmodi Curvæ aſſumantur, quæ interſectionibus imaginariis careant. Supra autem vidimus hujuſmodi interſectionibus imaginariis nullum relinqui locum, ſi in æquatione pro altera Curva Applicata y æquetur Functioni uniformi ipſius

Digitized by Google

 $x$; tum enim, quia hæc Curva nullas habet Applicatas imaginarias, fieri nequit ut interſectiones imaginariæ oriantur, quotcunque etiam Applicatis imaginariis altera Curva inquinetur. In hoc ergo conſtructionis negotio alteram Curvam perpetuo ita aſſumamus, ut ejus æquatio in hac forma $P + Qy = 0$, contineatur, denotantibus P & Q Functiones ipſius $x$.

500. Propoſita ergo quacunque æquatione eligatur una quædam conveniens Curva in æquatione $P + Qy = 0$. Et, quoniam æquatio pro altera Curva ita debet eſſe comparata, ut, ſi in ea loco $y$ ſubſtituatur valor $\frac{-P}{Q}$, ipſa æquatio propoſita reſultet; ex ipſa propoſita viciſſim efformari poterit æquatio pro altera Curva, introducendo $y$ loco $\frac{-P}{Q}$. Uti, ſi propoſita fuerit hæc æquatio $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, ſumatur Parabola pro altera Curva æquatione $ay = xx + bx$ contenta; ex qua, cum ſit $xx = ay - bx$, ſubſtituatur iſte valor in æquatione propoſita, quoties lubet; erit

$$\begin{aligned} x^4 &= aayy - 2abxy + bbxx \\ Ax^3 &= \qquad\quad + Aaxy - Abxx \end{aligned}$$

ideoque obtinebitur hujuſmodi æquatio ſecundi ordinis

$$aayy + a(A - 2b)xy + (B - Ab + bb)xx + Cx + D = 0;$$

cujus adeo interſectiones cum Curva $ay = xx + bx$ indicabunt radices æquationis propoſitæ.

502. Quemadmodum hæ Curvæ ambæ determinandis pro arbitrio conſtantibus $a$ & $b$ infinitis modis variari poſſunt, ita multo major adhuc varietas induci poteſt. Cum enim ex æquatione priori ſit $xx - ay + bx = 0$; erit quoque $acxx - aacy + abcx = 0$, quæ ſi addatur ad poſteriorem æquationem, multo latius patens orietur æquatio pro Linea ſecundi ordinis, cujus interſectiones cum priori radices æquationis propoſitæ æque indicabunt. Ambæ ſcilicet iſtæ Curvæ conſtructioni inſervientes erunt

I.

I.

$$ay = xx + bx$$

II.

$$aayy + a(A - 2b)xy + (B - Ab + bb + ac)\,xx - aacy + (C + abc)x + D = 0;$$

hæcque poſterior æquatio ita adornari poteſt, ut quamvis Sectionem conicam in ſe complectatur; attendendum ſcilicet eſt ad hanc quantitatem

$$AA - 4B - 4ac,$$

quæ ſi fuerit affirmativa, Curva erit Hyperbola; ſi fuerit $= 0$, Curva erit Parabola; ſin autem ſit quantitas negativa, Curva erit Ellipſis. Circulus vero erit hæc altera Curva ſi fuerit $b = \frac{1}{2}A$, & $aa = B - \frac{1}{4}AA + ac$, ſeu $c = a + \frac{AA}{4a} - \frac{B}{a}$: tum enim æquatio pro eo erit

$$aayy + aaxx - (a^3 + \frac{AAa}{4} - Ba)y + (C + \frac{Aaa}{2} + \frac{A^3}{8} - \frac{AB}{2})x + D = 0,$$

ſeu

$$(y - \frac{a}{2} - \frac{AA}{8a} + \frac{B}{2a})^2 + (x + \frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa})^2 =$$
$$(\frac{a}{2} + \frac{AA}{8a} + \frac{B}{2a})^2 + (\frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa})^2 - \frac{D}{aa},$$

ubi hoc membrum eſt quadratum Radii Circuli.

502. Sic igitur ex ſolis Sectionibus conicis habentur innumerabiles Curvæ, quæ cum Parabola $ay = xx + bx$ deſcriptæ, interſectionibus ſuis radices æquationis propoſitæ præbebunt. Harum ergo Curvarum quæcunque ſumatur, Parabola in iiſdem ſemper punctis interſecabitur; atque ideo illæ Curvæ omnes ſe mutuo in iiſdem punctis ſecabunt. Quocirca ex his Curvis infinitis duas quaſcunque aſſumere licebit, (prætermiſſa Parabola primum aſſumta,) quæ ſi ſuper communi Axe deſcribantur, per interſectiones ſuas radices æquationis propoſitæ ſemper indicabunt. Hocque adeo modo iſta æquatio conſtrui

 poterit vel per Circulum & Parabolam, uti ſupra jam vidimus, vel per duas Parabolas, vel per Parabolam & Ellipſin, Hyperbolamve, vel per duas Ellipſes, vel per duas Hyperbolas, vel per Ellipſin cum Hyperbola. Multo magis autem varietas conſtructionum multiplicabitur, ſi etiam Curvæ altiorum ordinum in hunc finem adhiberi velint.

503. Simili modo conſtrui poterunt æquationes altiorum graduum, aſſumendo pro altera Curva Lineam parabolici generis æquatione $y = P$ contentam. Sic, ſi propoſita ſit æquatio conſtruenda

$$x^{12} - f^{10} x^{2} + f^{9} g x - g^{12} = 0,$$

ſumatur æquatio Parabolica ordinis quarti $x^4 = a^3 y$; &, cum ſit $x^{12} = a^9 y^3$, hoc termino ſubſtituto emerget æquatio pro Linea tertii ordinis

$$a^9 y^3 - f^{10} x^2 + f^9 g x - g^{12} = 0;$$

ex qua, ſi ad eam addatur multiplum quodcunque prioris æquationis $x^4 - a^3 y = 0$, innumerabiles formabuntur Lineæ quarti ordinis, quarum binæ quævis conjunctæ æquationem propoſitam conſtruent.

504. Quod ſi eveniat, ut ex æquatione conſtruenda propoſita non ſatis idonea conſtructio præcedente methodo derivari queat; tum æquatio propoſita multiplicetur per $x$, vel $x^2$, vel $x^3$, vel altiorem quampiam poteſtatem ipſius $x$; ita ut ad ejus radices aliquot inſuper radices evaneſcentes addantur, quæ per interſectiones in ipſo Abſciſſarum initio factas indicabuntur, ideoque a reliquis radicibus veris æquationis propoſitæ facile diſcernentur. Sic igitur æquatio propoſita altioris ſit gradus, hoc tamen non obſtante ſæpenumero commodior conſtructio obtinebitur. Ita, ſi exempli gratia propoſita fuerit æquatio cubica

$$x^3 + Axx + Bx + C = 0;$$

quæ, poſito $xx = ay$, ita ut altera Curva conſtruens futura

ſit Parabola, altera erit ſemper Hyperbola; prodibit enim, loco $xx$ ſubſtituto $ay$ hæc æquatio

$$axy + Aay + Bx + C = 0;$$

vel, addita æquatione priore $cxx - acy = 0$, naſcetur hæc latius patens

$$axy + cxx + a(A - c)y + Bx + C = 0,$$

quæ quoque perpetuo eſt pro Hyperbola. Quod ſi ergo Circulum vel Ellipſin vel Parabolam adhibere commodius videatur; tum æquatio propoſita multiplicetur per $x$, ut habeatur hæc æquatio

$$x^4 + Ax^3 + Bxx + Cx = 0,$$

quæ, ſi cum æquatione biquadratica ſupra conſtructa comparetur, erit $D = 0$, hæcque æquatio ſemper per Circulum & Parabolam conſtrui poterit.

505. Quoniam ergo omnis æquatio cujuſque gradus per interſectiones duarum Curvarum algebraïcarum conſtrui poteſt, idque infinitis modis, Lineam quamcunque in locum alterius Curvæ ſubſtituere licebit: hincque enata eſt quæſtio, quemadmodum data æquatio ope datæ Curvæ conſtrui queat: Hic autem primum notandum eſt datam Curvam ex eo genere eſſe debere, ut ejus Applicata exprimatur per Functionem uniformem ipſius $x$, ne interſectiones imaginariæ conſtructionem perturbent, Neque enim ſufficeret, ut Curva, vel tantum portio Curvæ propoſita, habeat Abſciſſas uni radici æquationis æquales; quæ conditio, ſi quidem una tantum radix æquationis propoſitæ deſideretur, adjici eſt ſolita; fieri enim poſſet, ut iſte arcus Curvæ nullam patiatur interſectionem, etiamſi Abſciſſa cuipiam ipſius puncto reſpondens ſit vera radix; quoniam hæc radix vel per interſectionem imaginariam; vel per alius rami eidem Abſciſſæ reſpondentis interſectionem



Digitized by Google

indicari poſſet. Quam ob cauſam huic quæſtioni, curioſæ magis quam utili, non immoror, cum vera fundamenta omnium hujuſmodi conſtructionum ſatis fuſe oſtenderim.

---

## CAPUT XXI.

### *De Lineis curvis tranſcendentibus.*

506. HACTENUS de Lineis curvis algebraïcis egimus, quæ ita ſunt comparatæ, ut, ſumtis Abſciſſis in Axe quocunque, Applicatæ reſpondentes exprimantur per Functiones algebraïcas Abſciſſarum; ſeu, quod eodem redit, in quibus relatio inter Abſciſſas & Applicatas exprimi poſſit per æquationem algebraïcam. Hinc itaque ſponte ſequitur, ſi valor Applicatæ per Functionem algebraïcam Abſciſſæ explicari nequeat, Lineam curvam algebraïcis annumerari non poſſe. Hujuſmodi autem Lineæ curvæ, quæ algebraïcæ non ſunt, *tranſcendentes* vocari ſolent. Linea igitur tranſcendens ita definitur, ut ejuſmodi Curva eſſe dicatur, in qua relatio inter Abſciſſas & Applicatas æquatione algebraïca exprimi nequeat. Quoties ergo Applicata $y$ Functioni tranſcendenti ipſius Abſciſſæ $x$ æquatur, toties Linea curva ad genus tranſcendentium erit referenda.

507. In ſuperiori Sectione duas potiſſimum ſpecies quantitatum tranſcendentium evolvimus, quarum altera Logarithmos, altera Arcus circulares ſeu angulos, complectebatur. Quod ſi ergo Applicata $y$ ſit æqualis vel Logarithmo ipſius Abſciſſæ $x$, vel Arcui Circuli, cujus ſinus, ſeu coſinus, ſeu tangens per Abſciſſam $x$ exprimitur, ita ut ſit $y = lx$, vel $y = \text{A}.\mathit{ſin}.x$, vel $y = \text{A}.\mathit{coſ}.x$, vel $y = \text{A}.\mathit{tang}.x$, vel, ſi hujuſmodi valores tantum in æquationem inter $x$ & $y$ ingrediantur, tum Curva erit tranſcendens. Sunt autem hæ Curvæ tantum ſpecies tranſcendentium: præter iſtas enim dantur innumerabiles aliæ ex-

preſſiones tranſcendentes, quarum origo in Analyſi infinitorum fuſius exponetur, ita ut numerus Curvarum tranſcendentium longe ſuperet numerum Curvarum algebraïcarum. 

508. Quæcunque Functio non eſt algebraïca, ea eſt tranſcendens: ideoque Curvam, in cujus æquationem ingreditur, reddit tranſcendentem. Æquatio autem algebraïca, vel eſt rationalis, nulloſque ex ponentes præter numeros integros continet, vel eſt irrationalis, atque exponentes fractos complectitur; hoc autem poſteriori caſu ſemper ad rationalitatem revocari poteſt. Cujus igitur Curvæ æquatio relationem inter Coordinatas $x$ & $y$ exprimens ita eſt comparata, ut neque ſit rationalis, neque ad rationalitatem perduci poſſit, ea ſemper eſt tranſcendens. Quod ſi ergo in æquatione ejuſmodi poteſtates occurrant, quarum exponentes neque ſint numeri integri neque fracti, ad rationalitatem nullo modo perduci poterit, ideoque Curvæ talibus æquationibus contentæ erunt tranſcendentes. Hinc naſcitur prima ſpecies & quaſi ſimpliciſſima Curvarum tranſcendentium, in quarum æquationibus inſunt exponentes irrationales; quæ quia neque Logarithmos neque Arcus circulares involvunt: ſed ex ſola numerorum irrationalium notione naſcuntur, magis quodammodo ad Geometriam communem pertinere videntur, & hanc ob rem ab LEIBNITIO *interſcendentes* ſunt appellatæ, quaſi medium tenerent inter algebraïcas & tranſcendentes.

509. Hujuſmodi ergo Curva interſcendens erit, quæ continetur æquatione $y = x^{\sqrt{2}}$; quomodocunque enim hæc æquatio poteſtatibus ſumendis evehatur, nunquam ad rationalitatem perducetur. Talis æquatio autem nulla via geometrica conſtrui poteſt. Geometrice enim nullæ aliæ poteſtates exhiberi poſſunt, niſi quarum exponentes ſint numeri rationales, hanc que ob cauſam iſtiuſmodi Curvæ ab algebraïcis maxime diſcrepant. Si enim exponentem $\sqrt{2}$ tantum vero proxime exhibere velimus, ejus loco ponendo aliquam ex his fractio-

Lib. II. nibus $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{17}{12}$; $\frac{41}{29}$; $\frac{99}{70}$, quæ valorem $\sqrt{2}$ proxime exprimunt, Curvæ quidem algebraïcæ prodibunt ad quæſitam proxime accedentes, at ordinis erunt vel tertii, vel ſeptimi, vel decimi ſeptimi, vel quadrageſimi primi, &c. Quare, cum $\sqrt{2}$ rationaliter exprimi nequeat niſi per fractionem, cujus numerator & denominator ſint numeri infinite magni, hæc Curva ordini Linearum infiniteſimo erit accenſenda, ideoque pro algebraica haberi non poterit. Huc accedit, quod $\sqrt{2}$ duplicem involvat valorem, alterum affirmativum alterum negativum, ex quo $y$ duplicem perpetuo ſortietur valorem, ſicque gemina Curva reſultabit.

510. Deinde vero ſi hanc Curvam exacte conſtruere velimus, id ſine Logarithmorum beneficio præſtare non poſſumus. Cum enim ſit $y = x^{\sqrt{2}}$, erit, Logarithmis ſumendis, $ly = \sqrt{2}.lx$, cujuſvis ergo Abſciſſæ Logarithmus per $\sqrt{2}$ multiplicatus dabit Logarithmum Applicatæ; unde ad quamvis Abſciſſam $x$ reſpondens Applicata ex canone Logarithmorum aſſignabitur. Sic, ſi fuerit $x = 0$, erit $y = 0$: ſi $x = 1$, erit $y = 1$; qui valores ex æquatione facillime fluunt: at, ſi $x = 2$, erit $ly = \sqrt{2}.l2 = \sqrt{2}.0,3010300$: & ob $\sqrt{2} = 1,41421356$, erit $ly = 0,4257274$, ideoque proxime $y = 2,665186$: & ſi $x = 10$, erit $ly = 1,4142356$, hincque $y = 25,955870$. Hoc igitur modo ad ſingulas Abſciſſas Applicatæ ſupputari, atque adeo Curva conſtrui poterit; ſi quidem Abſciſſæ $x$ valores affirmativi tribuantur. Sin autem Abſciſſa $x$ valores obtineat negativos, tum difficile eſt dictu utrum valores ipſius $y$, futuri ſint reales an imaginarii: ſit enim $x = -1$, & quid ſit $(-1)^{\sqrt{2}}$ definiri non poterit, quoniam approximationes ad valorem $\sqrt{2}$ nihil adjumenti afferunt.

511. Multo minus erit dubitandum, quin æquationes, in quibus adeo exponentes imaginarii reperiuntur, ad genus tranſcendentium referri debeant. Fieri autem omnino poteſt, ut

expreſſio continens exponentes imaginarios valorem realem atque determinatum exhibeat. Hujus rei exempla ſupra jam occurrerunt; unde hic ſufficiat unum exemplum attuliſſe hoc

$$2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}},$$

in quo, etiamſi utrumque membrum $x^{+\sqrt{-1}}$ & $x^{-\sqrt{-1}}$ ſit quantitas imaginaria, tamen ſumma amborum valorem habet realem. Sit enim $lx = v$, ſumto $e$ pro numero, cujus Logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, erit $x = e^{v}$, quo valore loco $x$ ſubſtituto; erit $2y = e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}$. Vidimus autem in Sectione ſuperiori §. 138. eſſe

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} = cof.\, A.\, v,$$

unde fiet $y = cof.\, A.\, v = cof.\, A.\, lx$. Scilicet, propoſito quocunque ipſius $x$ valore in numeris, ſumatur ejus Logarithmus hyperbolicus, tum in Circulo, cujus radius $= 1$, abſcindatur Arcus iſti Logarithmo æqualis, hujuſque Arcus coſinus dabit valorem Applicatæ $y$. Sic, ſi ſumatur $x = 2$, ut ſit $2y = 2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$, erit $y = cof.\, A.\, l.\, 2 = cof.\, A.$ 0,693147180599. Iſte autem Arcus ipſi $l\,2$ æqualis, cum Arcus $= 3,1415926535$, &c., contineat 180°, per regulam auream invenietur fore 39°, 42′, 51″, 52‴, 9⁗, cujus coſinus eſt, 0,7692389013540 8, hicque numerus dat valorem Applicatæ $y$ reſpondentem Abſciſſæ $x = 2$. Cum igitur hujuſmodi expreſſiones & Logarithmos & Arcus circulares involvant, jure ad tranſcendentes referuntur.

512. Inter Curvas ergo tranſcendentes primum locum tenent, quarum æquationes, præter quantitates algebraïcas

Lib. II. Logarithmos involvunt, atque ſimpliciſſima harum erit quæ continetur hac æquatione $l\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$, ſeu $x = bl\frac{y}{a}$, ubi perinde eſt cujuſnam generis Logarithmi accipiantur, quia multiplicatione conſtantis $b$ omnia Logarithmorum ſyſtemata ad idem revocantur. Denotet ergo character $l$ Logarithmos hyperbolicos, atque Curva æquatione $x = bl\frac{y}{a}$ contenta ſub nomine LOGARITHMICÆ vulgo eſt nota. Sit $e$ numerus, cujus Logarithmus eſt $= 1$, ita ut ſit $e = 2,71828182845904523536028$, fietque $e^{x:b} = \frac{y}{a}$; ſeu $y = ae^{x:b}$, ex qua æquatione natura Curvæ logarithmicæ facillime cognoſcitur. Si enim loco $x$ ſucceſſive ſubſtituantur valores in arithmetica progreſſione procedentes, Applicatæ $y$ valores tenebunt inter ſe progreſſionem geometricam. Quæ quo facilius ad conſtructionem accommodetur, ponatur $e = m^n$, & $b = nc$, eritque $y = am^{x:c}$, ubi $m$ numerum quemcunque affirmativum unitate majorem ſignificare poteſt. Si igitur ſit

$$x = 0,\ c,\ 2c,\ 3c,\ 4c,\ 5c,\ 6c,\ \&c.$$

erit

$$y = a,\ am,\ am^2,\ am^3,\ am^4,\ am^5,\ am^6,\ \&c.;$$

&, tribuendis ipſi $x$ valoribus negativis, ſi ponatur

$$x = -c,\ -2c,\ -3c,\ -4c,\ -5c,\ \&c.$$

erit

$$y = \frac{a}{m},\ \frac{a}{m^2},\ \frac{a}{m^3},\ \frac{a}{m^4},\ \frac{a}{m^5},\ \&c.$$

Tab. XXIV. Fig. 101.

513. Hinc patet Applicatas $y$ ubique valores habere affirmativos, & quidem in infinitum creſcentes, auctis Abſciſſis $x$ affirmative in infinitum; ex altera autem Axis parte in infinitum

nitum decreſcentes, ita ut hinc Axis ſit Curvæ Aſymtota $Ap$. Sumto ſcilicet $A$ pro Abſciſſarum initio, erit hoc loco Applicata $AB = a$: &, ſumta Abſciſſa $AP = x$, erit Applicata $PM = y = am^{x:c} = ae^{x:b}$: ideoque $l.\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$. Unde Abſciſſa $AP$ per conſtantem $b$ diviſa exprimit Logarithmum rationis $\frac{PM}{AB}$. Si Abſciſſarum initium in alio quocunque Axis puncto $a$ ſtatuatur, æquatio ſimilis manet. Sit enim A $a = f$, ac poſita $aP = t$, ob $x = t - f$, erit $y = ae^{(t-f):b} = ae^{t:b}:e^{f:b}$. Vocetur conſtans $a:e^{f:b} = g$, erit $y = ge^{t:b}$. Hinc, ob $ab = g$, intelligitur fore $\frac{aP}{b} = l.\frac{PM}{ab}$; ideoque ductis duabus quibuſvis Applicatis $PM$ & $pm$, intervallo $Pp$ a ſe invicem diſtantibus, erit $\frac{Pp}{b} = l.\frac{PM}{pm}$, & conſtans $b$, a qua iſta relatio pendet, erit inſtar Parametri Logarithmicæ.

514. Tangens hujus Curvæ logarithmicæ in quovis puncto $M$ etiam facile poterit definiri. Cum enim, poſita $AP = x$, ſit $PM = ae^{x:b}$, ducatur alia quæcunque Applicata $QN$, a priori intervallo $PQ = u$ diſſita, eritque $QN = ae^{(x+u):b} = ae^{x:b}.e^{u:b}$; &, ducta $ML$ Axi parallela, erit $LN = (QN - PM) = ae^{x:b}(e^{u:b} - 1)$. Per puncta $M$ & $N$ ducatur recta $NMT$ Axi occurrens in puncto $T$, erit $LN:ML = PM:PT$, hincque $PT = u:(e^{u:b} - 1)$. Verum, uti in Sectione ſuperiori oſtendimus, per Seriem infinitam eſt $e^{u:b} = 1 + \frac{u}{b} + \frac{u^2}{2b^2} + \frac{u^3}{6b^3} + \&c.$: ideoque $PT =$

$\frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{u}{2b^2} + \frac{uu}{6b^3} + \&c.}$. Evaneſcat jam intervallum $PQ$ $= u$; & , ob puncta $M$ & $N$ coincidentia, recta $NMT$ fiet Curvæ Tangens, eritque tum Subtangens $PT = b$, ideoque conſtans; quæ eſt proprietas palmaria Curvæ logarithmicæ. Parameter ergo Logarithmicæ $b$ ſimul ejuſdem eſt Subtangens conſtantis ubique magnitudinis.

515. Quæſtio hic oritur, utrum hoc modo tota Curva logarithmica ſit deſcripta; & an ea, præter hunc ramum $MBm$ utrinque in infinitum excurrentem, nullas alias habeat partes. Vidimus enim ſupra nullam dari Aſymtotam, ad quam non duo rami convergant. Statuerunt ergo nonnulli, Logarithmicam ex duabus conſtare partibus ſimilibus ad utramque Axis partem ſitis, ita ut Aſymtota ſimul futura ſit Diameter. Verum æquatio $y = a e^{x:b}$ hanc proprietatem minime oſtendit; quoties enim eſt $\frac{x}{b}$ vel numerus integer, vel fractio denominatorem habens imparem, tum $y$ unicum habet valorem realem eumque affirmativum. Quod ſi autem fractio $\frac{x}{b}$ habeat denominatorem parem, tum Applicata $y$ geminum induet valorem, alterum affirmativum alterum negativum, hicque Curvæ punctum ad alteram Aſymtotæ partem exhibebit: ex quo Logarithmica infra Aſymtotam innumerabilia habebit puncta diſcreta, quæ Curvam continuam non conſtituunt, etiamſi ob intervalla infinite parva Curvam continuam mentiantur; quod eſt paradoxon in Lineis algebraïcis locum nullum inveniens. Hinc etiam aliud oritur paradoxon multo magis mirandum. Cum enim numerorum negativorum Logarithmi ſint imaginarii, (quod tum per ſe patet, tum inde intelligitur quod $log.$ $-1$ ad $\sqrt{-1}$ rationem habeat finitam) erit $l. -n$, quantitas imaginaria, quæ ſit $= i$: at, cum Logarithmus quadrati æquetur duplo Logarithmo radicis, erit $l. (-n)^2 = l. n^2 =$

Digitized by Google

$2\,i$. At, *log.* $n^2$ eſt quantitas realis, $= 2\,l.\,n$ : unde ſequitur, & quantitatem realem $l.\,n$ & imaginariam $i$ fore ſemiſſem ejuſdem quantitatis realis $l.\,n^2$. Hinc porro quilibet numerus duplicem habiturus eſſet ſemiſſem, alteram realem alteram imaginariam; ſimiliterque cujuſque numeri triplex daretur triens, quadruplex quadrans, & ita porro, quarum tamen partium, unica tantum ſit realis, quæ quomodo cum ſolita quantitatum notione conciliari queant, non liquet.

516. Conceſſis ergo his quæ aſſumſimus, ſequeretur numeri $a$ ſemiſſem fore æque $\frac{a}{2} + l. - 1$, ac $\frac{a}{2}$ : illius enim duplum eſt $a + 2\,l. - 1 = a + l.\,(-1)^2 = a + l.\,1 = a$ : ubi notandum eſt eſſe $+ l. - 1 = - l. - 1$, etiamſi non ſit $l. - 1 = 0$ : cum enim ſit $-1 = \frac{+1}{-1}$, erit $l. - 1 = l. + 1 - l. - 1 = - l. - 1$. Simili modo, cum ſit $\sqrt[3]{1}$ non ſolum 1 ſed etiam $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, erit $3\,l.\,\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = l.\,1 = 0$, ideoque ejuſdem quantitatis $a$ trientes erunt $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{3} + l.\,\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, & $\frac{a}{3} + l.\,\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$; tripla enim harum ſingularum expreſſionum producunt eandem quantitatem $a$. Ad hæc dubia ſolvenda, quæ nullo modo admitti poſſe videntur, aliud ſtatui oportet paradoxon: ſcilicet, cujuſque numeri infinitos dari Logarithmos, inter quos plus uno reali non detur. Sic, etſi Logarithmus unitatis eſt $= 0$, tamen præterea innumerabiles alii unitatis dantur Logarithmi imaginarii: qui ſunt $2\,l. - 1$, $3\,l.\,\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, $4\,l. - 1$; & $4\,l. \pm \sqrt{-1}$, innumerabileſque alii, quos extractio radicum monſtrat. Hæc autem ſententia multo eſt veriſimilior, quam ſuperior: poſito enim $x = l.\,a$, erit $a = e^x$; ideoque $a = 1 + x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \&c.$; quæ, cum ſit æquatio

Oo 2

infinitarum dimenſionum, mirum non eſt ſi $x$ habeat radices infinitas. Quanquam autem ſic poſterius paradoxon reſolvimus, tamen prius ſuam vim retinet, qua ad Logarithmicam infra Axem innumerabilia puncta diſcreta pertinere oſtendimus.

517. Multo evidentius autem hujuſmodi infinitorum punctorum diſcretorum exiſtentia monſtrari poteſt, per hanc æquationem $y=(-1)^x$: quoties enim $x$ eſt numerus, vel integer par vel fractus habens numeratorem parem, erit $y=1$: ſin autem $x$ ſit numerus vel integer impar vel fractus, cujus tam numerator quam denominator ſint numeri impares, erit $y=-1$, reliquis caſibus omnibus, quibus vel $x$ eſt fractio denominatorem parem habens, vel adeo numerus irrationalis, valor ipſius $y$ erit imaginarius. Æquatio ergo $y=(-1)^x$ exhibebit innumerabilia puncta diſcreta ad utramque Axis partem intervallo $=1$ poſita, quorum ne bina quidem ſunt contigua, hoc tamen non obſtante, quæque bina ad eandem Axis partem ſita, ſibi tam erunt propinqua, ut intervallum ſit data quavis quantitate aſſignabili minus. Inter duos enim Abſciſſæ valores quantumvis propinquos, non ſolum una ſed infinitæ fractiones exhiberi poſſunt, quarum denominatores ſint impares, ex his autem ſingulis naſcuntur puncta ad æquationem propoſitam pertinentia: mentientur ergo hæc puncta duas Lineas rectas Axi parallelas ab eo utrinque intervallo $=1$ diſſitas, in his enim Lineis nullum intervallum exhiberi poteſt in quo non unum, imo infinita puncta, æquatione $y=(-1)^x$ contenta, aſſignari queant. Hæc eadem anomalia uſuvenit in æquatione $y=(-a)^x$, aliiſque huic ſimilibus, ubi quantitas negativa ad exponentem indeterminatum elevatur. Hujuſmodi ergo paradoxa, quæ in Curvis tantum tranſcendentibus locum habere poſſunt, hic expoſuiſſe neceſſe erat.

Digitized by Google

518. Ad hoc ergo genus Curvarum a Logarithmis pendentium pertinent omnes æquationes, in quibus non ſolum Logarithmi occurrunt, ſed etiam exponentes variabiles, quippe qui a Logarithmis ad numeros progrediendo oriuntur, unde iſtæ Curvæ etiam *exponentiales* vocari ſolent. Hujuſmodi ergo Curva erit, quæ in hac æquatione $y = x^x$, ſeu $ly = xlx$ continetur. Poſito ergo $x = 0$, erit $y = 1$; ſi $x = 1$, erit $y = 1$; ſi $x = 2$, erit $y = 4$; ſi $x = 3$, erit $y = 27$, &c. Unde $BDM$ exprimet formam hujus Curvæ ad Axem $AP$ relatæ, ita ut, ſumta $AC = 1$, ſit $AB = CD = 1$. Intra $A$ & $C$ autem Applicatæ erunt unitate minores; ſi enim ſit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071068$: minima vero erit Applicata ſi capiatur Abſciſſa $x = \frac{1}{e} = 0,36787944$, fietque tum Applicata $y = 0,6922005$, uti in ſequentibus docebitur. Quemadmodum autem hæc Curva ultra $B$ ſit comparata ut videamus, Abſciſſa $x$ facienda eſt negativa, eritque $y = \frac{1}{(-x)^x}$, unde iſta pars ex meris punctis diſcretis conſtabit, ad Axem tanquam Aſymtotam convergentibus. Cadent autem hæc puncta ad utramque Axis partem, prout $x$ fuerit numerus vel par vel impar. Quin etiam infra Axem $AP$ infinita hujuſmodi puncta cadent, ſi pro $x$ ſumatur fractio denominatorem habens parem; poſito enim $x = \frac{1}{2}$, erit & $y = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ & $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. Curva ergo continua $MDB$ in $B$ ſubito terminatur, contra indolem Linearum algebraïcarum: loco continuationis autem habebit puncta illa diſcreta; unde realitas iſtorum punctorum quaſi conjugatorum eo luculentius perſpicitur. Niſi enim hæc adeſſe concedantur, ſtatui deberet, totam Curvam in puncto $B$ ſubito ceſſare, id quod eſſet legi continuitatis contrarium, ideoque abſurdum.

CAP. XXI.

TAB. XXIV. *Fig.* 102.

519. Inter infinitas alias hujus generis Curvas, quarum conſ-

LIB. II. ctructio per Logarithmos effici poteſt, dantur ejuſmodi, quarum conſtructio non tam facile patet, quæ tamen ope idoneæ ſubſtitutionis abſolvi queat. Talis eſt Curva æquatione $x^y = y^x$ contenta; ex qua quidem ſtatim perſpicitur, Applicatam $y$ perpetuo æqualem eſſe Abſciſſæ $x$, ita ut recta ad Axem ſub angulo ſemirecto inclinata æquationi ſatisfaciat. Interim tamen manifeſtum eſt hanc æquationem latius patere, quam æquationem pro recta $y = x$; neque igitur hanc vim æquationis $x^y = y^x$ exhaurire: ſatisfieri enim huic æquationi poteſt, etiamſi non ſit $x = y$; quoniam, ſi $x = 2$, etiam eſſe poteſt TAB. XXV. Fig. 103. $y = 4$. Præter rectam ergo $EAF$, æquatio propoſita alias complectetur partes; ad quas inveniendas, ideoque ad totam Lineam æquatione contentam exhibendam, ponamus $y = tx$, ut ſit $x^{tx} = t^x x^x$: unde, radice poteſtatis $x$ extrahenda, erit $x^t = t\,x$ & $x^{t-1} = t$; ideoque habebitur $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ & $y = t^{\frac{t}{t-1}}$. Vel, poſito $t - 1 = \frac{1}{u}$, erit $x = (1 + \frac{1}{u})^u$ & $y = (1 + \frac{1}{u})^{u+1}$. Hinc Curva, præter rectam $EAF$, habebit ramum $RS$ ad rectas $AG$ & $AH$, tanquam Aſymtotas, convergentem, cujus recta $AF$ erit Diameter. Secabit autem Curva rectam $AF$ in puncto $C$ ita ut ſit $AB = BC = e$, denotante $e$ numerum cujus Logarithmus eſt unitas. Inſuper autem æquatio ſuppeditat innumerabilia puncta diſcreta, quæ cum recta $EF$, & Curva $RCS$ æquationem exhauriunt. Hinc ergo innumerabilia binorum numerorum $x$ & $y$ paria exhiberi poſſunt ut ſit $x^y = y^x$, tales enim numeri in rationalibus erunt

$$x = 2 \qquad\qquad y = 4$$
$$x = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} \qquad y = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$
$$x = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} \qquad y = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81}$$
$$x = \frac{5^4}{4^4} = \frac{625}{256} \qquad y = \frac{5^5}{4^5} = \frac{3125}{1024}$$
&c. &c.

horum ſcilicet binorum numerorum alter ad alterum elevatus eandem quantitatem producit : ſic erit

$$2^4 = 4^2 = 16$$
$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}}$$
$$\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}} = \left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{256}{27}}$$
&c.

520. Quanquam in his ſimilibuſque aliis Curvis infinita puncta algebraïce poſſunt determinari, minime tamen Curvis algebraïcis annumerari poſſunt, quoniam innumerabilia alia extant puncta, quæ algebraïce nullo modo exhiberi poſſunt. Tranſeamus ergo ad alterum Curvarum tranſcendentium genus, quod Arcus circulares requirit : hic autem perpetuo radium Circuli, cujus Arcus conſtructionem ingrediuntur, unitate exprimo, ne pluribus characteribus calculus perturbetur. Curvas autem ad hoc genus pertinentes non eſſe algebraïcas facile oſtendi poteſt, etiamſi impoſſibilitas quadraturæ Circuli nondum ſit evicta. Conſideremus enim ſimpliciſſimam tantum hujus generis æquationem hanc $\frac{y}{a} = A.\,\mathit{ſin}.\,\frac{x}{c}$ ; ita ut Applicata $y$ ſit proportionalis Arcui Circuli, cujus Sinus eſt $\frac{x}{c}$. Quoniam enim eidem Sinui $\frac{x}{c}$ innumerabiles Arcus conve-

Lib. II. niunt, Applicata $y$ erit Functio infinitinomia; ideoque tam ipſa quam aliæ rectæ Curvam in infinitis punctis ſecabunt, quæ proprietas iſtam Curvam ab algebraïcis clariſſime diſtinguit. Sit $s$ minimus Arcus ſinui $\frac{x}{c}$ conveniens, & denotet $\pi$ ſemicircumferentiam Circuli, erunt valores ipſius $\frac{y}{a}$ ſequentes

$$s;\ \pi - s;\quad 2\pi + s;\quad 3\pi - s;\quad 4\pi + s;\quad 5\pi - s;\ \&c.$$
$$-\pi - s;\ -2\pi + s;\ -3\pi - s;\ -4\pi + s;\ -5\pi - s;\ \&c.$$

Tab. XXV. Fig. 104. Sumta ergo recta $CAB$ pro Axe, & $A$ pro Abſciſſarum principio; erunt primo, poſito $x = 0$, Applicatæ $AA^{1} = \pi a$, $AA^{2} = 2\pi a$, $AA^{3} = 3\pi a$; &c. Itemque ex altera parte $AA^{-1} = \pi a$, $AA^{-2} = 2\pi a$, $AA^{-3} = 3\pi a$, &c.: atque per ſingula hæc puncta Curva tranſibit. Sumta vero Abſciſſa $AP = x$, Applicata Curvam in infinitis punctis $M$ ſecabit, eritque $PM^{1} = as$, $PM^{2} = a(\pi - s)$, $PM^{3} = a(2\pi + s)$, &c. Curva ergo tota ex infinitis portionibus $AE^{1}A^{1}$; $A^{1}F^{1}A^{2}$; $A^{2}E^{2}A^{3}$; $A^{3}F^{3}A^{4}$; &c., ſimilibus erit compoſita; ita ut ſingulæ rectæ Axi $BC$ parallelæ, quæ per puncta $E$ & $F$ ducuntur, futuræ ſint Curvæ diametri. Erit vero $AC = AB = c$, & intervalla $E^{1}E^{2}$, $E^{2}E^{3}$, $E^{1}E^{-1}$, $E^{-1}E^{-2}$, itemque $F^{1}F^{2}$, $F^{1}F^{-1}$, $F^{-1}F^{-2}$, erunt ſingula æqualia $2a\pi$. Curva hæc a Leibnitio eſt vocata *Linea Sinuum*, quoniam ejus ope cujuſque Arcus ſinus facile invenitur. Cum enim ſit $\frac{y}{a} = A.\ \textit{ſin.}\ \frac{x}{c}$, erit viciſſim $\frac{x}{c} = \textit{ſin.}\ A.\ \frac{y}{a}$. Si ponatur $\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\pi - \frac{z}{a}$, fiet $\frac{x}{c} = \textit{coſ.}\ A.\ \frac{z}{a}$; ſicque ſimul habetur *Linea Coſinuum.*

521. Simili modo ex hac conſideratione oritur *Linea Tangentium*, cujus æquatio erit $y = A.\ \textit{tang.}\ x$, poſitis brevitatis ergo $a = 1$ & $c = 1$; hinc ergo convertendo fit $x = \textit{tang.}\ A.\ y = \frac{\textit{ſin.}\, y}{\textit{coſ.}\, y}$, cujus Curvæ figura facile ex natura Tangentium colligitur.

colligitur. Habebit autem infinitas Aſymtotas inter ſe parallelas. Pari modo deſcribi poterit *Linea Secantium* ex æquatione $y = A.\,sec.\,x$, ſeu $x = sec.\,A.\,y = \frac{1}{cos.\,y}$, quæ etiam infinitos ramos habet in infinitum excurrentes. Maxime vero ex hoc Curvarum genere innotuit CYCLOIS, ſeu *Trochois*, quæ deſcribitur a puncto in peripheria Circuli ſuper linea recta rotando progredientis, cujus æquatio inter Coordinatas orthogonales eſt $y = \surd(1 - xx) + A.\,cos.\,x$. Curva hæc, cum ob deſcriptionis facilitatem tum ob plurimas, quibus gaudet, inſignes proprietates, maxime eſt notatu digna. Quoniam autem pleræque ſine Analyſi infinitorum explicari nequeunt, hic tantum præcipuas, quæ ex deſcriptione immediate fluunt, breviter perpendamus CAP. XXI.

522. Rotetur ergo Circulus $ACB$ ſuper recta $EA$; atque, ut inveſtigatio latius pateat, non punctum Peripheriæ $B$ ſed punctum Diametri productæ $D$ quodcumque deſcribat Lineam curvam $Dd$. Sit hujus Circuli radius $CA = CB = a$, diſtantia $CD = b$, atque in hoc quidem ſitu punctum $D$ locum obtineat ſummum. Perveneriт inter rotandum Circulus in ſitum $aQbR$; ac, poſito ſpatio $AQ = z$ erit Arcus $aQ = z$, qui diviſus per radium $a$ dabit angulum $acQ = \frac{z}{a}$, & punctum deſcribens erit in $d$, ut ſit $cd = b$, angulus $dcQ = \pi - \frac{z}{a}$; & $d$ erit punctum in Curva quæſita. Ducatur ex $d$ primum in rectam $AQ$ normalis $dp$, tum in rectam $QR$ normalis $dn$; erit $dn = b.\,ſin.\,\frac{z}{a}$ & $cn = -b.\,cos.\,\frac{z}{a}$: ergo $Qn = dp = a + b.\,cos.\,\frac{z}{a}$. Producatur $dn$ donec rectæ $AD$ occurrat in $P$; ac vocentur Coordinatæ $DP = x$, $Pd = y$; erit $x = b + cn$; ſeu $x = b - b.\,cos.\,\frac{z}{a}$, & $y = AQ + dn = z + b.\,ſin.\,\frac{z}{a}$. Cum igitur TAB. XXV. Fig. 105.

 ſit $b.\ coſ.\ \frac{z}{a} = b - x$, erit $b.\ ſin.\ \frac{z}{a} = \surd(2bx - xx)$ & $z = a\,A.\ coſ.\ (1 - \frac{x}{b}) = a\,A.\ ſin.\ \frac{\surd(2bx - xx)}{b}$; quibus valoribus ſubſtitutis, erit $y = \surd(2bx - xx) + aA.\ ſin.\ \frac{\surd(2bx - xx)}{b}$.

Vel, ſi Abſciſſæ in Axe $AD$ a Centro computentur voceturque $b - x = t$, erit, $\surd(2bx - xx) = \surd(bb - tt)$, & inter $t$ & $y$ habebitur æquatio iſta

$$y = \surd(bb - tt) + a\,A.\ coſ.\ \frac{t}{b},$$

quæ æquatio dat Cycloidem *ordinariam*, ſi fuerit $b = a$; ſin autem ſit vel $b$ major quam $a$, vel $b$ minor quam $a$, Curva vocatur Cyclois vel *curtata* vel *elongata*. Semper autem erit $y$ Functio infinitiplex ipſius $x$, vel $t$; ſeu, quælibet recta baſi $AQ$ parallela Curvam in infinitis punctis ſecabit, niſi ejus diſtantia $x$ vel $t$ fuerit tanta, ut $\surd(2bx - xx)$ vel $\surd(bb - tt)$ fiat imaginaria quantitas.

TAB. XXVI. Fig. 106. 523. Inter Curvas hujus generis, quæ imprimis ſunt cognitæ, referri debent *Epicycloides* & *Hypocycloides*, quæ oriuntur ſi Circulus $ACB$ ſuper Peripheria alterius Circuli $OAQ$ rotatur, intereaque punctum quodpiam $D$, vel extra vel intra Circulum mobilem ſumtum, Curvam $Dd$ deſcribit. Ponatur Circuli immoti radius $OA = c$, radius Circuli mobilis $CA = CB = a$, & diſtantia puncti deſcribentis $CD = b$; ſumatur autem recta $OD$ pro Axe Curvæ quæſitæ $Dd$. A ſitu hoc initiali, quo puncta $O$, $C$, $D$ in directum jacent, proceſſerit Circulus mobilis in ſitum $QcR$, deſcripto Arcu $AQ = z$, ita ut ſit angulus $AOQ = \frac{z}{c}$. Erit ergo Arcus $Qa = AQ = z$; hincque angulus $acQ = \frac{z}{a} = Rcd$: &, ſumta recta $cd = CD = b$, erit $d$ punctum in Curva $Dd$. Ex eo in Axem demittatur perpendiculum $dP$; itemque ex $c$

Digitized by Google

perpendiculum $cm$ & $cn$ parallela Axi $OD$. Ergo, ob angulum $Rcn = AOQ = \frac{z}{c}$, erit angulus $dcn = \frac{z}{c} + \frac{z}{a} = \frac{(a+c)z}{ac}$. Unde obtinetur $dn = b.\,ſin.\frac{(a+c)z}{ac}$, & $cn = b.\,coſ.\frac{(a+c)z}{ac}$. Deinde, ob $OC = Oc = a + c$, erit $cm = (a+c).\,ſin.\frac{z}{c}$, & $Om = (a+c).\,coſ.\frac{z}{c}$. Vocatis ergo Coordinatis $OP = x$, & $Pd = y$, erit $x = (a+c).\,coſ.\frac{z}{c} + b.\,coſ.\frac{(a+c)z}{ac}$, & $y = (a+c).\,ſin.\frac{z}{c} + b.\,ſin.\frac{(a+c)z}{ac}$. Hinc patet, ſi $\frac{a+c}{a}$ fuerit numerus rationalis, tum ob commenſurabilitatem angulorum $\frac{z}{c}$ & $\frac{(a+c)z}{ac}$, ipſam incognitam $z$ eliminari, ideoque æquationem algebraïcam inter $x$ & $y$ inveniri poſſe. Reliquis caſibus Curva hoc modo deſcripta erit tranſcendens. CAP. XXI.

Ceterum hic notandum eſt, ſi ſumatur $a$ negativum, tum Hypocycloidem eſſe prodituram, Circulo mobili intra Circulum immobilem cadente. Vulgo quidem $b$ ſtatuitur Radio $a$ æqualis; ſicque Epicycloides & Hypocycloides proprie ſic dictæ reſultant. Hic igitur inventæ Curvæ latius patent; &, quia æquationes non ſunt difficiliores, hanc conditionem adjicere viſum eſt. Si quadrata $xx$ & $yy$ addantur, erit $xx + yy = (a+c)^2 + b^2 + 2b(a+c).\,coſ.\frac{z}{a}$, cujus æquationis ope eliminatio ipſius $z$ eo facilius expedietur, quoties quidem quantitates $a$ & $c$ fuerint commenſurabiles.

524. Præter caſus, quibus amborum Circulorum radii $a$ & $c$ ſunt inter ſe commenſurabiles, Curvæque fiunt algebraïcæ, notari meretur iſte quo $b = -a - c$; ſeu, quo punctum Curvæ $D$ in Centrum Circuli immobilis $O$ incidit. Sit igitur $b = -a - c$; eritque $xx + yy = 2(a+c)^2(1 - coſ.\frac{z}{a})$

$= 4(a+c)^2 (\text{coſ.} \frac{z}{2a})^2$; unde fiet $\text{coſ.} \frac{z}{2a} = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{2(a+c)}$. Deinde, cum ſit $x = (a+c)(\text{coſ.} \frac{z}{c} - \text{coſ.} \frac{(a+c)z}{ac})$ & $y = (a+c)(\text{ſin.} \frac{z}{c} - \text{ſin.} \frac{(a+c)z}{ac})$, erit $\frac{x}{y} = -\text{tang.} \frac{(2a+c)z}{2ac}$ & $\text{ſin.} \frac{(2a+c)z}{2ac} = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$; atque $\text{coſ.} \frac{(2a+c)z}{2ac} = \frac{-y}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Quare, cum ſit $\sqrt{(xx+yy)} = 2(a+c) \text{coſ.} \frac{z}{2a}$, fiet $x = 2(a+c) . \text{coſ.} \frac{z}{2a} . \text{ſin.} \frac{(2a+c)z}{2ac}$, & $y = -2(a+c) . \text{coſ.} \frac{z}{2a} . \text{coſ.} \frac{(2a+c)z}{2ac}$. Sit, exempli gratia, $c = 2a$; erit $x = 6a . \text{coſ.} \frac{z}{2a} . \text{ſin.} \frac{z}{a}$, & $y = -6a . \text{coſ.} \frac{z}{2a} . \text{coſ.} \frac{z}{a}$, & $\sqrt{(xx+yy)} = 6a . \text{coſ.} \frac{z}{2a}$. Ponamus $\text{coſ.} \frac{z}{2a} = q$, erit $\text{ſin.} \frac{z}{2a} = \sqrt{(1-qq)}$, & $\text{ſin.} \frac{z}{a} - 2q\sqrt{(1-qq)}$, atque $\text{coſ.} \frac{z}{a} = 2qq - 1$: unde fit $q = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{6a}$, & $y = -6aq(2qq-1) = (1-2qq)\sqrt{(xx+yy)} = (1 - \frac{xx-yy}{18aa})$ $\sqrt{(xx+yy)}$; ſeu, $18aay = (18aa - xx - yy)\sqrt{(xx+yy)}$. Ponatur $18aa = ff$; &, ſumtis quadratis, habebitur iſta æquatio ſexti ordinis $(xx+yy)^3 - 2ff(xx+yy)^2 + f^4xx = 0$. Quoniam vero hic nobis eſt propoſitum non Curvas algebraïcas ſed tranſcendentes contemplari, his miſſis ad ejuſmodi Curvas progrediamur, quarum conſtructio ſimul tam Logarithmos quam Arcus circulares requirat.

TAB. XXVI. Fig. 107. 525. Supra vero jam ejuſmodi nacti ſumus Curvam ex æquatione $2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}}$, quam tranſmutavimus in hanc $y = \text{coſ.} A . lx$. Hæc vero ulterius abit in $A . \text{coſ.} y = lx$, & $x = e^{A . \text{coſ.} y}$. Sumta ergo recta $AP$ pro Axe, in eoque $A$ pro initio Abſciſſarum, primo patet ultra $A$ in re-

gione Abſciſſarum negativarum Curvæ nullam dari portionem continuam, Axis autem $AP$ a Curva in infinitis punctis $D$ interſecabitur, quorum punctorum ab $A$ diſtantiæ progreſſionem geometricam conſtituent, erit ſcilicet $AD = e^{\frac{\pi}{2}}$; $AD' = e^{\frac{3\pi}{2}}$; $AD'' = e^{\frac{5\pi}{2}}$; $AD''' = e^{\frac{7\pi}{2}}$; &c., tum vero dabuntur infinitæ interſectiones ad $A$ propius accedentes, $AD^{-1} = e^{\frac{-\pi}{2}}$, $AD^{-2} = e^{\frac{-3\pi}{2}}$, $AD^{-3} = e^{\frac{-5\pi}{2}}$ &c. Deinde hæc Curva utrinque ad Axem excurret ad diſtantias $AB = AC = 1$, ibique rectas Axi parallelas tanget in infinitis punctis $E$ & $F$, quorum diſtantiæ a $B$ & $C$ pariter progreſſionem geometricam conſtituent. Infinitis ergo flexibus Curva ad rectam $BC$ accedet, atque tandem cum ea prorſus confundetur. Singularis ergo hujus Curvæ proprietas in hoc conſiſtit, quod non recta infinita ſed finita $BC$ Curvæ ſit Aſymtota, quo ipſo hujus Curvæ indoles ab algebraïcis maxime diſtinguitur.

CAP. XXI.

526. Ad Curvas tranſcendentes, quarum conſtructio angulos, vel ſolos vel cum Logarithmis conjunctos, requirit, referri quoque debent innumerabiles SPIRALIUM ſpecies. Reſpiciunt autem Spirales punctum quodpiam fixum $C$ tanquam Centrum, circa quod plerumque infinitis ſpiris circumducuntur. Natura harum Curvarum commodiſſime explicatur per æquationem inter cujuſque Curvæ puncti $M$ a Centro $C$ diſtantiam $CM$ & angulum $ACM$, quem hæc recta $CM$ cum recta poſitione data $CA$ conſtituit. Sit ergo angulus $ACM = s$; ſeu, ſit $s$ Arcus Circuli radio $= 1$ deſcripti, qui ſit anguli $ACM$ menſura, ac ponatur recta $CM = z$. Quod, ſi nunc detur æquatio quæcunque inter variabiles $s$ & $z$, Curva reſultabit ſpiralis. Cum enim angulus $ACM$, præter $s$, infinitis modis exprimi queat; quoniam anguli $2\varpi + s$, $4\varpi + s$, $6\pi + s$, &c., item $-2\varpi + s$, $-4\pi + s$, &c., eandem poſitionem rectæ $CM$ exhibent, his valoribus loco $s$

TAB. XXVI. *Fig.* 108.

LIB. II. in æquatione ſubſtitutis, diſtantia $CM$ infinitos diverſos obtinebit valores, ideoque recta $CM$ producta Curvam in infinitis punctis ſecabit, niſi ex his valoribus quantitas $z$ fiat imaginaria. Incipiamus ergo a caſu ſimpliciſſimo, quo eſt $y = as$; eruntque pro eadem rectæ $CM$ poſitione valores ipſius $y$ iſti $a(2\pi + s)$, $a(4\pi + s)$, $a(6\pi + s)$ &c., itemque $-a(2\pi - s)$, $-a(4\pi - s)$, $-a(6\varpi - s)$, &c. Quin etiam ſi pro $s$ ponatur $\pi + s$, eadem rectæ $CM$ manebit poſitio, præterquam quod valor ipſius $z$ capi debeat negative: hinc ad valores ipſius $z$ aſſignatos, addi oportet hos $-a(\pi + s)$, $-a(3\pi + s)$, $-a(5\pi + s)$, &c.: prætereaque iſtos $a(\pi - s)$; $a(3\varpi - s)$; $a(5\pi - s)$, &c. Cur-
TAB. XXVII. *Fig.* 109. væ ergo hujus forma erit talis, qualis in figura ad marginem allegata repræſentatur; rectam ſcilicet $AC$ in $C$ tangit, hincque duobus ramis, utrinque infinitis gyris Centrum $C$ ambientibus & ſe mutuo in recta $BC$ ad $AC$ normali perpetuo decuſſantibus, in infinitum extenditur; eritque recta $BCB$ ejus Diameter. Vocari autem hæc Curva ab inventore ſolet *Spiralis Archimedea;* atque, ſi ſemel eſt exacte deſcripta, inſervit ad quemvis angulum in quotcunque partes ſecandum, uti ex ejus æquatione $z = as$ ſponte patet.

527. Quemadmodum æquatio $z = as$, quæ, ſi $z$ & $s$ eſſent Coordinatæ orthogonales, foret pro Linea recta, præbuit Spiralem Archimedeam; ita ſi aliæ æquationes algebraïcæ inter $z$ & $s$ accipiantur, infinitæ aliæ prodibunt Lineæ ſpirales, ſi quidem æquatio ita ſit comparata, ut ſingulis ipſius $s$ valoribus reſpondeant valores reales ipſius $z$. Ita, hæc æquatio $z = \frac{a}{s}$, quæ ſimilis eſt æquationi pro Hyperbola ad Aſymtotas relata, præbet ſpiralem, quæ a Cel. *Johanne* BERNOULLIO vocata eſt Spiralis Hyperbolica; atque, poſtquam ex Centro $C$ infinitis gyris exiiſſet, tandem in diſtantia infinita ad rectam $AA$ tanquam Aſymtotam accedit. Quod ſi proponatur æquatio $z = a\sqrt{s}$; angulis $s$ negative ſumtis nulla reſpondebit diſtantia realis $z$; valoribus autem affirmativis ſin-

Digitized by Google

gulis ipſius $s$ gemini valores ipſius $z$ reſpondebunt, alter affirmativus alter negativus: ſpiræ tamen circa $C$ abſolventur infinitæ. Sin autem æquatio inter $z$ & $s$ fuerit hujuſmodi $z = a\sqrt{(nn - ss)}$, variabilis $z$ nullum habebit valorem realem niſi $s$ contineatur intra hos limites $+n$ & $-n$; ideoque hoc caſu Curva erit finita. Scilicet, ſi ad Axem $ACB$ per Centrum $C$ utrinque inclinentur rectæ $EF$, $EF$, cum Axe angulum $= n$ conſtituentes, hæ erunt Curvæ ſeſe in $C$ decuſſantis tangentes, ipſaque Curva habebit Lemniſcatæ formam $ACBCA$. Simili autem modo innumerabiles aliæ obtinebuntur Linearum tranſcendentium formæ, quas evolvere nimis foret prolixum. CAP. XXI. TAB. XXVII. Fig. 110.

528. Hæc tractatio porro in immenſum amplificari poſſet, ſi inter $z$ & $s$ non æquationes algebraïcæ ſed adeo tranſcendentes accipiantur. Ex quo genere præ reliquis notari meretur ea Linea curva, quæ hac æquatione $s = n\,l.\frac{z}{a}$ exprimitur; in qua ſcilicet anguli $s$ ſont Logarithmis diſtantiarum $z$ proportionales; ob quam cauſam hæc Curva *Spiralis Logarithmica* appellatur, atque ob plurimas inſignes proprietates maxime eſt nota. Hujus Curvæ primaria proprietas eſt, quod omnes rectæ ex Centro $C$ eductæ Curvam ſub æqualibus angulis interſecent. Ad eam ex æquatione educendam, ſit angulus $ACM = s$, & recta $CM = z$, eritque $s = n\,l.\frac{z}{a}$ & $z = ae^{\frac{s}{n}}$; tum capiatur angulus major $ACN = s + v$, erit recta $CN = ae^{\frac{s}{n}}e^{\frac{v}{n}}$, ideoque Centro $C$ deſcripto Arcu $ML$, qui erit $= zv$, fiet $LN = ae^{\frac{s}{n}}(e^{\frac{v}{n}} - 1) = ae^{\frac{s}{n}}\left(\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \text{\&c.}\right)$. Hinc erit, $\frac{ML}{LN} =$ TAB. XXVII. Fig. 111.

$$\frac{v}{\frac{v}{n}+\frac{v^2}{2n^2}+\frac{v^3}{6n^3}+\&c.}=\frac{n}{1+\frac{v}{2n}+\frac{v^2}{6nn}+\&c.}$$. At evaneſcente angulorum differentia $MCN = v$, fiet $\frac{ML}{LN}$ tangens anguli, quem Radius $CM$ cum Curva conſtituit; unde, facto $v = 0$, iſtius anguli $AMC$ tangens erit $= n$, ideoque iſte angulus conſtans. Si fuerit $n = 1$, iſte angulus erit ſemirectus, hocque caſu Spiralis logarithmica vocatur ſemirectangula.

---

## CAPUT XXII.

*Solutio nonnullorum problematum ad Circulum pertinentium.*

529. Posito Radio Circuli $= 1$, ſupra vidimus fore ſemicircumferentiam $\pi$, ſeu Arcum 180 graduum, $=$ 3,14159265358979323846264338, cujus numeri Logarithmus decimalis ſeu vulgaris eſt 0,497149872694133854351268288; qui ſi multiplicetur per 2, 30258 &c., prodibit ejuſdem numeri Logarithmus hyperbolicus, qui erit $=$ 1, 14472988584940017414342237. Cum igitur longitudo Arcus 180 graduum ſit cognita, inde cujuſvis Arcus in gradibus dati longitudo poterit aſſignari. Propoſitus ſit Arcus $n$ graduum, cujus longitudo, quæ quæritur, ſit $= z$; erit $180 : n = \pi : z$, ideoque $z = \frac{\pi n}{180}$: hinc Logarithmus ipſius $z$ reperitur, ſi a Logarithmo numeri $n$ ſubtrahatur iſte Logarithmus 1, 7581226324091722154525264I3. Quod ſi autem Arcus propoſitus detur in minutis primis, ut ſit $n'$; tum a Logarithmo ipſius $n$ ſubtrahi debebit iſte Logarithmus 3, 536273882792815847961293211. Sin autem Arcus propoſitus

poſitus detur in minutis ſecundis ut ſit $= n''$, tum longitudinis iſtius Arcus Logarithmus reperietur, ſi a Logarithmo numeri $n$ ſubtrahatur iſte Logarithmus
5,31442513317645948047006009, vel ſi ad Logarithmum numeri $n$ addatur 4,68557486682354051952993990, & a characteriſtica ſummæ 10 ſubtrahantur.

530. Ex his ergo viciſſim Radius & ejus partes quæcunque, cujuſmodi ſunt Sinus, Tangentes & Secantes in Arcus converti, hique Arcus more ſolito ſecundum gradus, minuta & ſecunda exprimi poſſunt. Sit $z$ hujuſmodi Linea per Radium 1 ejuſque partes decimales expreſſa; ſumatur ejus Logarithmus, ejuſque characteriſtica denario augeatur, quemadmodum in tabulis Logarithmi Sinuum, Tangentium & Secantium repræſentari ſolent; quo facto vel ſubtrahatur ab iſto Logarithmo 4,68557486682354051952993990, vel ad eundem Logarithmum addatur 5,31442513317645948047006009; utroque caſu prodibit Logarithmus, cujus numerus reſpondens præbebit Arcum in minutis ſecundis expreſſum. Poſteriori quidem caſu characteriſtica denario minui debet. Quod ſi autem quæratur Arcus ipſi radio æqualis; hic ſine Logarithmis facilius per regulam auream invenitur, cum ſit $\pi$ ad $180^\circ$ ut 1 ad Arcum radio æqualem; hinc autem reperitur iſte Arcus in gradibus expreſſus $57^\circ,29577951308232087 6798$, idem vero Arcus in minutis primis expreſſus erit
$3437',74677078493925260788$; in minutis vero ſecundis erit idem Arcus $= 206264''$, 8062470963551564728. Conſueto autem more hic Arcus expreſſus continebit

$$57^\circ,\ 17',\ 44'',\ 48''',\ 22'''',\ 29''''',\ 21'''''',$$

Hujus Arcus per ſeries in Sectione ſuperiori exhibitas reperitur

Sinus $= 0,\ 84147098480514$

&

Coſinus $= 0,\ 54030230584341$

quorum numerorum ille per hunc diviſus dabit Tangentem anguli $57^\circ,\ 17',\ 44'',\ 48''',\ 22'''',\ 29''''',\ 21''''''$, &c.

531. His igitur præmiſſis, quibus Arcus circulares cum Sinubus & Tangentibus comparari poſſunt, plurimas quæſtiones ad naturam Circuli ſpectantes reſolvere poterimus. Ac primo quidem, patet omnem Arcum Sinu ſuo eſſe majorem, niſi ſit evaneſcens; aliter autem ratio Coſinuum eſt comparata, quoniam anguli evaneſcentis Coſinus eſt $= 1$, ideoque Arcu major, anguli vero recti Coſinus eſt $= 0$, ideoque Arcu eſt minor: ex quo patet intra limites $0°$ & $90°$ dari Arcum, qui ſit ſuo Coſinui æqualis, quem ſequenti problemate inveſtigemus.

## PROBLEMA I.

*Invenire Arcum Circuli, qui ſit ſuo Coſinui æqualis.*

### SOLUTIO.

Sit $s$ iſte Arcus quæſitus; eritque $s = cof. s$; ex qua æquatione valor ipſius $s$ commodius quam per regulam *falſi* dictam vix inveniri poterit. Ad hoc autem jam propemodum valorem ipſius $s$ noſſe oportet, quod vel levi conjectura aſſequi licet: niſi autem hoc pateat, tres pluresve valores loco $s$ ſubſtituantur, & Coſinus pariter ad eandem unitatem revocetur. Ponamus $s = 30°$, quem Arcum ad partes radii revocemus regula ſupra data

$$l. 30 = 1,4771213$$
$$\text{ſubtrahe } \underline{1,7581226}$$
$$l. Arch. 30° \; 9,7189987$$
$$\text{at eſt}$$
$$l. cof. 30 = 9,9375306$$

unde patet Coſinum $30°$ multo eſſe majorem Arcu ideoque Arcum quæſitum majorem eſſe $30°$, Fingamus ergo

Digitized by Google

$s = 40°$

eritque

$l.\ 40 = 1{,}6020600$

ſubtrahe $1{,}7581226$

$l.\ Arc.\ 40° = 9{,}8439374$

at eſt

$l.\ coſ.\ 40 = 9{,}8842540$

hinc intelligitur Arcum quæſitum aliquanto majorem eſſe quam 40°, hancque ob rem fingamus $s = 45°$, erit

$l.\ 45 = 1{,}6532125$

ſubtrahe $1{,}7581226$

$l.\ Arc.\ 45° = 9{,}8950899$

at eſt

$l.\ coſ.\ 45° = 9{,}8494850$

continetur ergo angulus quæſitus inter 40°, & 45°: atque adeo hinc proxime definiri poterit. Nam, poſito $s = 40°$,

eſt error $= +\ 403166$:

poſito autem $s = 45°$,

eſt error $= -\ 456049$,

& differentia $= 859215$,

Fiat ergo ut 859215 ad 403166 ita differentia hypotheſium 5° ad exceſſum Arcus quæſiti ſupra 40°, unde Arcus quæſitus major fit quam 42°, limites enim illi nimis ſunt remoti, quam ut exactius definire queamus. Sumamus ergo limites propiores



Digitized by Google

| | $s = 42°$ | $s = 43°$ |
|---|---|---|
| $l.\, s =$ | 1,6232493 | 1,6334685 |
| ſubtrahe | 1,7581226 | 1,7581226 |
| $l.\, s =$ | 9,8651267 | 9,8753459 |
| | & eſt | & eſt |
| $l.\, Coſ.\, s =$ | 9,8710735 | 9,8641275 |
| | + 59468 | — 112184 |
| | 112184 | |

$171652 : 59468 = 1° : 20', 47''.$

Arctiſſimos ergo obtinuimus limites 42°, 20′, & 42°, 21′ intra quos verus ipſius *s* valor contineatur. Hos angulos ad minuta prima revocemus

| | $s = 2140'$ | $s = 2541'$ |
|---|---|---|
| $l.\, s =$ | 3,4048337 | 3,4050047 |
| ſubtrahe | 3,5362739 | 3,5362739 |
| $l.\, s =$ | 9,8685598 | 9,8687308 |
| $l.\, coſ.\, s =$ | 9,8687851 | 9,8686700 |
| | + 2253 | — 608 |
| | 608 | |

$2861 : 2253 = 1' : 47'', 14'''$

Hinc concludimus Arcum quæſitum, qui ſuo Coſinui ſit æqualis, fore = 42°, 20′, 47″, 14‴, hujuſque Coſinus, ſeu ipſa longitudo, erit = 0, 7390847. Q. E. I.

TAB. XXVIII. *Fig.* 112. 532. Sector Circuli *ACB* a Chorda *AB* in duas partes ſecatur, Segmentum *AEB* & triangulum *ACB*, quorum illud hoc minus eſt ſi angulus *ACB* fuerit exiguus, majus autem ſi angulus *ACB* ſit admodum obtuſus. Dabitur ergo caſus quo Sector *ACB* per Chordam *AB* in duas partes æquales ſecatur, unde naſcitur.

## PROBLEMA II.

*Invenire Sectorem Circuli* ACB, *qui a Chorda* AB *in duas partes æquales ſecetur, ita ut Triangulum* ACB *æquale ſit Segmento* AEB.

Digitized by Google

### SOLUTIO.

Poſito Radio $AC = 1$, ſit Arcus quæſitus $AEB = 2s$, ut ſit ejus ſemiſſis $AE = BE = s$: ducto ergo Radio $CE$, erit $AF = ſin.\,s$, & $CF = coſ.\,s$: Unde ſit Triangulum $ACB = ſin.\,s.\,coſ.\,s = \frac{1}{2}.\,ſin.\,2s$; & ipſe Sector $ACB$ eſt $= s$, qui cum æquari debeat duplo Triangulo, erit $s = ſin.\,2s$; ideoque Arcus quæri debet, qui æqualis ſit Sinui Arcus duplici. Primum quidem patet angulum $ACB$ recto eſſe majorem; ideoque $s$ ſuperare $45^\circ$, unde ſequentes faciamus hypotheſes

| | $s = 50^\circ$ | $s = 55^\circ$ | $s = 54^\circ$ |
|---|---|---|---|
| $l.s =$ | 1, 6989700 | 1, 7403627 | 1, 7323938 |
| ſubtrahe. | 1, 7581226 | 1, 7581226 | 1, 7581226 |
| | 9, 9408474 | 9, 9822401 | 9, 9742712 |
| $l.\,ſin.\,2s =$ | 9, 9933515 | 9, 9729858 | 9, 9782063 |
| | + 525041 | — 92543 | + 39351 |

$$\begin{array}{r} 525041 \\ 92543 \\ \hline 617584 \end{array}$$

$617584 : 525041 = 5^\circ : 4^\circ, 15'$

Erit ergo propemodum $s = 54^\circ, 15'$: unde ad ſuperiores hypotheſes addamus $s = 54^\circ$, & ex erroribus concludetur $s = 54^\circ, 17', 54''$, qui valor a vero minuto integro non diſcrepat: faciamus ergo ſequentes poſitiones minuto tantum diſcrepantes

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $s = 54^\circ, 17'$ | $s = 54^\circ, 18'$ | $s = 54^\circ, 19'$ |
| | ſeu | ſeu | ſeu |
| | $s = 3257'$ | $s = 3258'$ | $s = 3259'$ |
| | & | & | & |
| | $2s = 108^\circ, 34'$ | $2s = 108^\circ, 36'$ | $2s = 108^\circ, 38'$ |
| | $compl. = 71^\circ, 26'$ | $compl. = 71^\circ, 24'$ | $compl. = 71^\circ, 22'$ |
| $l.\,s =$ | 3, 5128178 | 3, 5129511 | 3, 5130844 |
| ſubtrahe | 3, 5362739 | 3, 5362739 | 3, 5362739 |
| $l.\,s =$ | 9, 9765439 | 9, 9766772 | 9, 9768105 |
| $l.\,ſin.\,2s =$ | 9, 9767872 | 9, 9767022 | 9, 9766171 |
| | + 2433 | + 250 | — 1934 |

$$\begin{array}{r} 250 \\ 1934 \\ \hline 2184 \end{array}$$

fiat ergo $2184 : 250 = 1' : 6'', 52'''$

 Hinc erit $s = 54^{\circ}, 18', 6'', 52'''$. Si hunc angulum accuratius determinare velimus, majoribus tabulis uti oportet; unde faciamus ſequentes hypotheſes $10''$ differentes

| | |
|---|---|
| $s = 54^{\circ}, 18', 0''$ | $s = 54^{\circ}, 18', 10''$ |
| ſeu | ſeu |
| $s = 195480''$ | $s = 195490''$ |
| $2s = 108^{\circ}, 36', 0''$ | $2s = 108^{\circ}, 36', 20''$ |
| *compl.* $= 71^{\circ}, 24', 0''$ | *compl.* $= 71^{\circ}, 23', 40''$ |
| $l.\,s = 5,2911023304$ | $5,2911245466$ |
| ſubtrahe $5,3144251322$ | $5,3144251332$ |
| $9,9766771972$ | $9,9766994134$ |
| *l. ſin.* $2s = 9,9767022291$ | $9,9766880552$ |
| $+ \quad 250319$ | $- \quad 113,82$ |
| $113582$ | |

$363901 : 250319 = 10'' : 6'', 52''', 43'''', 33'''''$.

Erit ergo $s = 54^{\circ}, 18', 6'', 52''', 43'''', 33'''''$; ideoque angulus $ACB = 108^{\circ}, 36', 13'', 45''', 27'''', 6'''''$, ejuſque complementum $= 71, 23, 46, 14, 32, 54$, cujus ſinus Logarithmus, ſeu

*l. ſin.* $2s = 9,9766924791$,

& ipſe

ſinus $= 0,9477470$.

Deinde erit

$n.s = AF = BF = 0,8121029$,

ideoque ejus duplum, ſeu

Chorda $AB = 1,6242058$.

Præterea vero erit

Coſinus $CF = 0,5335143$.

Sicque vero proxime Sector quæſitus conſtrui poterit. Q. E. I.

533. Simili modo determinari poteſt Sinus, quo Circuli quadrans in duas partes æquales ſecatur.

## PROBLEMA III.

Tab. XXVIII Fig. 113. *In quadrante Circuli* ACB *applicare Sinum* DE *qui Aream quadrantis in duas partes æquales biſecet.*

SOLUTIO.



Sit Arcus $AE = s$; erit $BE = \frac{\pi}{2} - s$, ob $AEB = \frac{\pi}{2}$; & Area quadrantis $= \frac{1}{4}\pi$. Jam Area Sectoris $ACE$ eſt $= \frac{1}{2}s$, a qua Triangulum $CDE = \frac{1}{2}.\,ſin.\,s.\,coſ.\,s$ ſubtractum relinquet ſpatium $ADE = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}.\,ſin.\,s.\,coſ.\,s$, cujus duplum dare debet quadrantem: ex quo erit $\frac{1}{4}\pi = s - \frac{1}{2}.\,ſin.\,2s$: ergo $s - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}.\,ſin.\,2s$. Ponatur Arcus $s - \frac{1}{4}\pi = s - 45^\circ = u$: erit $2s = 90 + 2u$; ideoque eſſe oportet $u = \frac{1}{2}.\,coſ.\,2u$, & $2u = coſ.\,2u$. Cum ergo Arcus requiratur, qui ſuo Coſinui æquetur, eumque problemate primo invenerimus, erit $2u = 42^\circ, 20', 47'', 14'''$, & $u = 21^\circ, 10', 23'', 37'''$. Quocirca erit Arcus $AE = s = 66^\circ, 10', 23'', 37'''$, & Arcus $BE = 23^\circ, 49', 36'', 23'''$. Hinc erit Radii pars $CD = 0{,}4039718$, & $AD = 0{,}5960281$, atque Sinus $DE = 0{,}9147711$. Hoc ergo modo, quo Circuli quadrans biſecatur, totus Circulus ſecabitur in 8 partes æquales. Q. E. F.

534. Quemadmodum Circulum omnis recta per Centrum ducta bifariam ſecat, ita ex quovis Peripheriæ puncto rectæ educi poterunt, quæ Circulum in tres pluresve partes æquales ſecent. Inquiramus in quadriſectionem, ac reſolvamus.

PROBLEMA IV.

*Propoſito ſemicirculo* AEDB *ex puncto* A *educere Chordam* AD *quæ Aream ſemicirculi in duas partes æquales ſecet.* TAB. XXVIII *Fig. 114.*

SOLUTIO.

Sit Arcus quæſitus $AD = s$; ductoque Radio $CD$, erit

LIB. II. area Sectoris $ACD = \frac{1}{2} s$, a qua auferatur Triangulum $ACD = \frac{1}{2} AC \,.\, DE = \frac{1}{2} .\, ſin.\, s$, remanebitque Segmentum $AD = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} .\, ſin.\, s$, quod æquale eſſe debet ſemiſſi ſemicirculi $ADB$, at area ſemicirculi eſt $= \frac{1}{2} \pi$ : unde erit $s - ſin.\, s = \frac{1}{2} \pi = 90^\circ$, ideoque $s - 90^\circ = ſin.\, s$. Ponatur $s - 90^\circ = u$; erit $ſin.\, s = coſ.\, u$, & hanc ob rem $u = coſ.\, u$. Per Problema ergo primum erit $u = 42^\circ, 20', 47'', 14'''$; hincque $s =$ angulo $ACD = 132^\circ, 20', 47'', 14'''$, & angulus $BCD = 47^\circ, 39', 12'', 46'''$. Ipſa vero Corda $AD$ erit $= 1,8295422$. Q. E. F.

535. Sic igitur in Circulo Segmentum abſcinditur cujus area ſit totius Circuli pars quarta, Segmentum autem ſemiſſi Circuli æquale eſt ipſe ſemicirculus ejuſque Corda Diameter. Simili modo Segmentum inveniri poteſt, quod ſit triens totius Circuli, quod ſequenti Problemate inveſtigemus.

## PROBLEMA V.

TAB. XXIX. Fig. 115. *Ex puncto Peripheriæ* A *educere duas Cordas* AB, AC, *quibus area Circuli in tres partes æquales dividatur.*

### SOLUTIO.

Poſito Circuli Radio $= 1$, & hemiperipheria $= \pi$, ſit Arcus $AB$ vel $AC = s$; eritque area Segmenti $AEB$ vel $AFC = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} .\, ſin.\, s$: at area Circuli eſt $= \pi$; unde, cum Segmenti $AEB$ area debeat eſſe triens Circuli, fiet $\frac{1}{2} s - \frac{1}{2} .\, ſin.\, s = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$; ſeu, $s - ſin.\, s = 120^\circ$, ideoque $s - 120^\circ = ſin.\, s$. Sit $s - 120^\circ = u$, erit $u = ſin.\, (u + 120) = ſin.\, (60 - u)$.

Arcus

Arcus ergo $u$ quæri debet, qui ſit æqualis ſinui anguli $60^\circ - u$. Erit ergo $u$ minor quam $60^\circ$; ad quem Arcum inveniendum faciamus ſequentes poſitiones



| | | | |
|---|---|---|---|
| $u =$ | $20^\circ$ | $u = 30^\circ$ | $u = 40^\circ$ |
| $60 - u =$ | $40^\circ$ | $60 - u = 30^\circ$ | $60 - u = 20^\circ$ |
| $l.\, u =$ | 1,3010300 | 1,4771213 | 1,6020600 |
| ſubtrahe | 1,7581226 | 1,7581226 | 1,7581226 |
| $l.\, u =$ | 9,5429074 | 9,7189987 | 9,8439374 |
| $l.\, fin.\, (60 - u) =$ | 9,8080675 | 9,6989700 | 9,5340517 |
| | + 2651601 | − 200287 | − 3098857 |

Patet ergo angulum $u$ aliquanto eſſe minorem quam $30^\circ$, &, calculo ſubducto, major eſſe debet quam $29^\circ$ ſit ergo $u = 29^\circ$

| | |
|---|---|
| $60 - u =$ | $31^\circ$ |
| $l.\, u =$ | 1,4623980 |
| ſubtrahe | 1,7581226 |
| $l.\, u =$ | 9,7042754 |
| $l.\, fin.\, (60 - u) =$ | 9,7118393 |
| | + 75649 |
| | − 200287 |
| | 275926 |

$$275926 : 75639 = 1^\circ : 16', 26''.$$

Foret ergo angulus $u = 29^\circ, 16', 26''$, ad quem accuratius inveniendum, faciamus has hypotheſes uno tantum minuto differentes

| | | |
|---|---|---|
| $u =$ | $29^\circ, 16'$ | $u = 29^\circ, 17'$ |
| | ſeu | ſeu |
| $u =$ | $1756'$ | $u = 1757'$ |
| $60 - u =$ | $30^\circ, 44'$ | $60 - u = 30^\circ, 43'$ |
| $l.\, u =$ | 3,2445245 | 3,2447718 |
| ſubtrahe | 3,5362739 | 3,5362739 |
| $l.\, u =$ | 9,7082506 | 9,7084979 |
| $l.\, fin.\, (60 - u) =$ | 9,7084575 | 9,7082450 |
| | + 2069 | − 2529 |
| | 2529 | |
| | 4598 | |

$$4598 : 2069 = 1' : 27'', 0'''.$$

Erit ergo vere $u = 29^\circ, 16', 27'', 0'''$,

hincque

LIB. II.

Arcus $s = AEB = 149^\circ, 16', 27'', 0''' = AFC$;

unde reſultat

Arcus $BC = 61^\circ, 27', 6'', 0'''$,

ipſa vero

Chorda $AB = AC = 19285340$. Q. E. F.

536. His Problematis, quibus Arcus quiſpiam quæritur dato Sinui vel Coſinui æqualis, adjungamus ſequens, quo quidem idem negotium proponitur, attamen major difficultas occurrit.

PROBLEMA VI.

TAB. XXIX. Fig. 116. *In ſemicirculo* AEB *Arcum* AE *abſcindere, ita ut, ducto ejus Sinu* ED, *Arcus* AE *ſit æqualis ſummæ rectarum* AD + DE.

SOLUTIO.

Quoniam ſtatim patet hunc Arcum quadrante eſſe majorem, quæramus ejus Complementum $BE$, & vocemus Arcum $BE = s$, ita ut ſit Arcus $AE = 180^\circ - s$, atque ob $AC = 1$, $CD = cof. s$, $DE = ſin. s$, erit $180^\circ - s = 1 + cof. s + ſin. s$. At, eſt $ſin. s = 2\, ſin. \frac{1}{2} s. cof. \frac{1}{2} s$, & $1 + cof. s = 2\, cof. \frac{1}{2} s. cof. \frac{1}{2} s$; unde fit $180^\circ - s = 2 cof. \frac{1}{2} s\, (ſin. \frac{1}{2} s + cof. \frac{1}{2} s)$. At, eſt $cof. (45^\circ - \frac{1}{2} s) = \frac{1}{\sqrt{2}}. cof. \frac{1}{2} s + \frac{1}{\sqrt{2}}. ſin. \frac{1}{2} s$: ergo $ſin. \frac{1}{2} s + cof. \frac{1}{2} s = \sqrt{2}. cof. (45^\circ - \frac{1}{2} s)$: unde erit $180^\circ - s = 2\sqrt{2}. cof. \frac{1}{2} s \times cof. (45^\circ - \frac{1}{2} s)$. Hac facta reductione, faciamus ſequentes poſitiones

CAP. XXII.

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2}s = 20^\circ$ | $\frac{1}{2}s = 21^\circ$ |
| $45^\circ - \frac{1}{2}s = 25^\circ$ | $45^\circ - \frac{1}{2}s = 24^\circ$ |
| $180 - s = 140^\circ$ | $180 - s = 138^\circ$ |
| $l.(180 - s) = 2{,}1461280$ | 2, 1398791 |
| ſubtrahe 1,7581226 | 1, 7581226 |
| $l.(180 - s) = 0{,}3880054$ | 0, 3817565 |
| $l.\,coſ.\,\frac{1}{2}s = 9{,}9729858$ | 9, 9701517 |
| $l.\,coſ.\,(45^\circ - \frac{1}{2})s = 9{,}9572757$ | 9, 9607302 |
| $l.\,2\sqrt{2} = 0{,}4515450$ | 0, 4515450 |
| 0,3818065 | 0, 3824269 |
| Error + 61989 | — 6704 |

6704

68693 : 61989 = 1° : 54′

Hinc continetur $\frac{1}{2}s$ intra limites 20°, 54′, & 20°, 55′, ideoque ſequentes hypotheſes fiant

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2}s = 20^\circ, 54'$ | $\frac{1}{2}s = 20^\circ, 55'$ |
| $45^\circ - \frac{1}{2}s = 24^\circ, 6'$ | $45 - \frac{1}{2}s = 24^\circ, 5'$ |
| $s = 41^\circ, 48'$ | $s = 41^\circ, 50'$ |
| $180 - s = 138^\circ, 12'$ | $180 - s = 138^\circ, 10'$ |
| ſeu | ſeu |
| $180 - s = 8292'$ | $180 - s = 8290'$ |
| $l.(180 - s) = 3{,}9186593$ | 3, 9185545 |
| ſubtrahe 3,5362739 | 3, 5362739 |
| 0,3823854 | 0, 3822806 |
| $l.\,coſ.\,\frac{1}{2}s = 9{,}9704419$ | 9, 9703937 |
| $l.\,coſ.\,(45 - \frac{1}{2})s = 9{,}9603919$ | 9, 9604484 |
| $l.\,2\sqrt{2} = 0{,}4515450$ | 0, 4515450 |
| 0,3823788 | 0, 3823871 |
| Error + 66 | — 1065 |

1065

1131 : 66 = 1′ : 3″, 30‴.

 Hanc ob rem erit $\frac{1}{2}\ s = 20^{\circ},\ 54',\ 3'',\ 30'''$,

inde

$s = 41^{\circ},\ 48',\ 7'',\ 0''' = BE$

ideoque Arcus quæſitus

$AE = 138^{\circ},\ 11',\ 53'',\ 0'''$.

Erit vero Linea

$DE = 0,6665578$, & $AD = 1,7454535$. *Q. E. F.*

537. Comparemus nunc Arcus cum ſuis Tangentibus; &, cum in primo quadrante Tangentes ſint Arcubus minores, quæramus Arcum, qui ſuæ Tangentis ſemiſſi ſit æqualis, quo ſolvetur

## PROBLEMA VII.

TAB. XXIX. *Fig.* 117. *Abſcindere Sectorem* ACD, *qui ſit ſemiſſis Trianguli* ACE *a Radio* AC, *Tangente* AE *&* *Secante* CE *comprehenſi.*

### SOLUTIO.

Poſito Arcu $AD = s$, erit Sector $ACD = \frac{1}{2}\ s$, Triangulum vero $ACE = \frac{1}{2}.\ tang.\ s$: unde debet eſſe $\frac{1}{2}.\ tang.\ s = s$, ſeu $2\ s = tang.\ s$. Faciamus ergo has hypotheſes

| | $s = 60^{\circ}$ | $s = 70^{\circ}$ | $s = 66^{\circ}$ | $s = 67^{\circ}$ |
|---|---|---|---|---|
| $l.\ 2\ s =$ | 2,0791812 | 2,1461280 | 2,1205739 | 2,1271048 |
| | 1,7581226 | 1,7581226 | 1,7581226 | 1,7581226 |
| $l.\ 2\ s =$ | 0,3210586 | 0,3880054 | 0,3624513 | 0,3689822 |
| $l.\ tang.\ s =$ | 0,2385606 | 0,4389341 | 0,3514169 | 0,3721481 |
| | + 824980 | — 509287 | + 110344 | — 31659 |

Hinc ipſius $s$ reperiuntur limites arctiores $66^{\circ},\ 46'$, & $66^{\circ},\ 47'$: quare fiat

| | |
|---|---|
| $s = 66^\circ, 46'$ | $s = 66^\circ, 47'$ |
| ſeu | ſeu |
| $s = 4006'$ | $s = 4007'$ |
| $2s = 8012'$ | $2s = 8014'$ |
| $l.\,2s = 3,9037409$ | $3,9038493$ |
| $3,5362739$ | $3,5362739$ |
| $l.\,2s = 0,3674670$ | $0,3675754$ |
| $l.\,tang.\,s = 0,3672499$ | $0,3675985$ |
| Error $+\ 2171$ | $-\ 231$ |
| $231$ | |

$$2402 : 2171 = 1' : 54'', 14'''.$$

unde erit

$$\text{Arcus } s = AD = 66^\circ, 46', 54'', 14''',$$

hincque

$$\text{Tangens } AE = 2,3311220. \quad Q.\,E.\,F.$$

538. Proponatur nunc ſequens.

### PROBLEMA VIII.

*Propoſito Circuli quadrante* ACB *invenire Arcum* AE, *qui æqualis ſit Chordæ ſuæ* AE *ad occurſum* F *uſque productæ.* TAB. XIX. Fig. 118.

### SOLUTIO.

Sit Arcus $AE = s$, erit ejus Chorda $AE = 2.\,\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}s$, ſinus verſus $AD = 1 - \mathit{coſ.}\,s = 2.\,\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}s.\,\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}s$: unde Triangula ſimilia $ADE$, $ACF$, dabunt $2.\,\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}s.\,\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}s : 2.\,\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}s = 1 : s$, eritque ergo $s.\,\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}s = 1$. Fiant ergo ſequentes poſitiones

Digitized by Google

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $s = 70^\circ$ | $s = 80^\circ$ | $s = 84^\circ$ | $s = 85^\circ$ |
| $l.\,s =$ | 1,8450980 | 1,9030900 | 1,9242793 | 1,9294189 |
| ſubtrahe | 1,7581226 | 1,7581226 | 1,7581226 | 1,7581226 |
| | 0,0869754 | 0,1449674 | 0,1661567 | 0,1712963 |
| $l.\,\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}s =$ | 9,7585913 | 9,8080675 | 9,8255109 | 9,8296833 |
| | 9,8455667 | 9,9530349 | 9,9916676 | 0,0009796 |
| Error | + 0,1544332 | 0,0469650 | + 83223 | — 9796 |

Unde $s$ continetur intra limites $84^\circ, 53'$, & $84^\circ, 54'$

Sit ergo

| | | |
|---|---|---|
| | $s = 84^\circ, 53'$ | $s = 84^\circ, 54'$ |
| | ſeu | ſeu |
| | $s = 5093'$ | $s = 5094'$ |
| | $\frac{1}{2}s = 42^\circ, 26\frac{1'}{2}$ | $\frac{1}{2}s = 42^\circ, 27'$ |
| $l.\,s =$ | 3, 7069737 | 3, 7070589 |
| ſubtrahe | 3, 5362739 | 3, 5362739 |
| | 0, 1706998 | 0, 1707850 |
| $l.\,\mathit{ſin.}\,\frac{1}{2}s =$ | 9, 8292003 | 9, 8292694 |
| | 0, 9999001 | 0, 0000544 |
| Error | + 998 | — 544 |

Hincque oritur

$$\text{Arcus } s = AE = 84^\circ, 53', 38'', 51''',$$

&

$$\text{Arcus } BE = 50^\circ, 6', 21'', 9'''. \quad Q.\,E.\,I.$$

539. Quanquam in primo quadrante omnes Arcus ſunt ſuis Tangentibus minores, tamen in ſequentibus quadrantibus dantur ejuſmodi Arcus qui ſint æquales ſuis Tangentibus, quos in ſequenti Problemate methodo ex ſeriebus petita inveſtigemus.

## PROBLEMA IX.

*Invenire omnes Arcus, qui Tangentibus ſuis ſint æquales.*

### SOLUTIO.

Primus Arcus hac proprietate præditus eſt infinite parvus.

Digitized by Google

Tum in ſecundo quadrante, quia hic Tangentes ſunt negativæ, datur nullus iſtiuſmodi Arcus; in tertio vero quadrante dabitur unus 270° aliquanto minor; porro dabuntur ejuſmodi Arcus in quinto, ſeptimo, &c. Ponatur quarta Peripheriæ pars $= q$, & Arcus quæſiti contineantur in hac forma $(2n+1)q - s$, ita ut ſit $(2n+1)q - s = cot. s = \frac{1}{tang. s}$. Sit $tang. s = x$; erit $s = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$, ideoque $(2n+1)q = \frac{1}{x} + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$ Patet autem, ob $s$ Arcum eo minorem, quo major fuerit numerus $n$, fore $x$ quantitatem valde parvam ideoque proxime $x = \frac{1}{(2n+1)q}$; ſeu $\frac{1}{x} = (2n+1)q$; propius autem invenitur $\frac{1}{x} = (2n+1)q - s = (2n+1)q - \frac{1}{(2n+1)q} - \frac{2}{3(2n+1)^3 q^3} - \frac{13}{15(2n+1)^5 q^5} - \frac{146}{105(2n+1)^7 q^7} - \frac{2343}{945(2n+1)^9 q^9} - \&c.$ Cum ergo ſit $q = \frac{\pi}{2} = 1{,}5707963267948$, erit Arcus quæſitus $= (2n+1)\,1{,}570796332679 - \frac{1}{2n+1}\,0{,}63661977 - \frac{0{,}17200817}{(2n+1)^3} - \frac{0{,}09062596}{(2n+1)^5} - \frac{0{,}05892834}{(2n+1)^7} - \frac{0{,}04258543}{(2n+1)^9} - \&c.$ Vel ſi iſti termini, qui in partibus Radii exprimuntur, ad menſuram Arcuum reducantur, erit Arcus quæſitus in genere conſideratus $= (2n+1)\,90° - \frac{131313''}{2n+1} - \frac{35479''}{(2n+1)^3} - \frac{18692''}{(2n+1)^5} - \frac{12155''}{(2n+1)^7} - \frac{8784''}{(2n+1)^9}$. Arcus ergo quæſtioni ſatisfacientes ordine ſunt.

LIB. II.

| | | |
|---|---|---|
| I. | 1. 90° — 90° | |
| II. | 3. 90° — 12° 32′ 48″ | |
| III. | 5. 90° — 7, 22, 32 | |
| IV. | 7. 90° — 5, 14, 22 | |
| V. | 9. 90° — 4, 3, 59 | |
| VI. | 11. 90° — 3, 19, 24 | |
| VII. | 13. 90° — 2, 48, 37 | |
| VIII. | 15. 90° — 2, 26, 5 | |
| IX. | 17. 90° — 2, 8, 51 | |
| X. | 19. 90° — 1, 55, 16 | |

540. Hujuſmodi quæſtiones plures non propono, cum methodus ea reſolvendi ex his exemplis clare perſpiciatur. Ceterum hæc Problemata in hunc finem potiſſimum ſunt excogitata, ut Circuli natura, cujus quadratura omnibus methodis adhuc uſitatis fruſtra fuit tentata, penitius inſpiciatur. Si enim accidiſſet, ut in ſolutione cujuſpiam Problematis, vel Arcus cum tota Circumferentia commenſurabilis, vel ejus Sinus Tangenſve per Radium conſtruibilis prodiiſſet, tum utique ſpecies quædam quadraturæ Circuli haberetur. Scilicet, ſi in ſolutione Problematis VI. Sinus $DE$, qui prodit $= 0{,}6665578$, inventus fuiſſet $= 0{,}6666666 = \frac{2}{3}$, elegans certe Circuli proprietas innoteſceret, Arcus quippe $AE$ conſtrui poſſet Lineæ rectæ $AD + DE = 1 + \frac{2}{3} + \surd\frac{5}{9}$ æqualis. Nulla vero etiamnum ratio patet, quæ hujuſmodi Circuli quadraturam impoſſibilem eſſe evincat: atque, ſi talis detur, nulla alia via, præter hanc, quam hoc Capite aperuimus, ad eam inveſtigandam magis apta videtur.

TAB. XXIX. Fig. 116.

*FINIS LIBRI SECUNDI.*

APPEN-

# APPENDIX

## DE

# SUPERFICIEBUS.



Digitized by Google

Digitized by Google

## CAPUT I.

### *De Superficiebus Corporum in genere.*

1. Quæ in ſuperiori Sectione de Lineis curvis ſunt tradita earumque ad æquationes revocandarum ratione, latiſſime quidem patent, atque ad omnes Lineas curvas, quarum cuncta puncta in eodem plano ſint poſita, extenduntur. Verum, ſi tota Linea curva non fuerit in eodem plano ſita, tum præcepta ſupra data non ſufficiunt ad proprietates ejuſmodi Curvarum eruendas. Hujus generis Curvæ duplicem habent curvaturam; hocque nomine de iis eximium ſcripſit tractatum Acutiſſimus Geometra Clairaut. Cum autem hæc materia maxime ſit connexa cum natura Superficierum, de qua hac ſectione exponere conſtitui, ſeorſim eam non pertractabo, ſed ejus explicationem cum ſequenti de Superficiebus doctrina conjungam.

2. Quemadmodum Lineæ ſunt vel rectæ vel curvæ, ita Superficies ſunt vel planæ, vel non planæ. Non planas autem voco, quæ vel convexæ ſunt vel concavæ, vel utriuſque naturæ participes. Sic, Superficies externa Globi, Cylindri, & Coni, exceptis baſibus, eſt convexa; interna autem cavitatis Superficies concava. Quemadmodum porro Linea recta eſt, cujus terna quæque puncta in directum ſunt poſita; ita Superficies plana eſt cujus quaterna quæque puncta in eodem plano ſunt poſita; ex quo perſpicuum eſt Superficiem non planam, hoc eſt ſive convexam, ſive concavam, eſſe cujus non omnia quaterna puncta in eodem plano ſunt ſita.

3. Superficies igitur non plana qualis ſit facilime intelligetur ſi, quantum a Superficie plana ubique diſcrepet, cognoverimus. Simili ſcilicet modo, quo indolem Linearum curvarum ex diſtantiis, quibus ejus quæque puncta a Linea recta pro Axe aſſumta diſtant, colligimus, ita naturam Superficierum



Digitized by Google

APPEND. æſtimari conveniet ex ſingulorum ejus punctorum diſtantiis a Superficie plana pro lubitu aſſumta. Propoſita ergo quacunque Superficie, cujus indolem definiri oporteat, pro arbitrio eligatur Superficies plana, ad quam ex ſingulis Superficiei propoſitæ punctis perpendicula ducta concipiantur: quo facto, ſi cujuſvis horum perpendiculorum longitudo per æquationem determinari queat, naturam Superficiei hac ipſa æquatione exprimi cenſebimus. Ex tali enim æquatione viciſſim omnia Superficiei puncta aſſignari poterunt, atque ideo ipſa Superficies determinabitur.

TAB. XXX. *Fig.* 119. 4. Repræſentet planum tabulæ eam Superficiem planam, ad quam ſingula cujuſque Superficiei propoſitæ puncta referamus. Sit $M$ punctum quodcunque Superficiei propoſitæ, quod extra planum tabulæ ſitum concipiatur, unde ad hoc planum perpendicularis demittatur $MQ$, plano in puncto $Q$ occurrens. Jam, ad ſitum hujus puncti $Q$ calculo exprimendum, aſſumatur in plano tabulæ recta quæpiam $AB$ pro Axe, ad quem ex puncto $Q$ recta normalis ducatur $QP$. Denique in ipſo Axe $AB$ ſumatur punctum quodvis $A$ pro initio Abſciſſarum: quo facto, ſitus puncti $M$ innoteſcet ſi noverimus longitudines trium iſtarum Linearum $AP$, $PQ$ & $QM$, ſicque tribus Coordinatis inter ſe normalibus ſitus cujuſque Superficiei puncti $M$ ſimili modo determinabitur, quo Linearum curvarum in plano ſitarum ſingula puncta per duas Coordinatas inter ſe normales exhiberi ſolent.

5. Cum igitur habeamus tres Coordinatas $AP$, $PQ$ & $QM$, ponamus $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; ex hiſque indolem Superficiei propoſitæ intelligemus, ſi, ſumtis pro lubitu binis $x$ & $y$, noverimus quanta futura ſit tertia $z$; hoc enim modo omnia Superficiei puncta $M$ determinare poterimus. Natura ergo cujuſvis Superficiei exprimitur æquatione, qua Coordinata $z$ definitur per binas reliquas $x$ & $y$ una cum conſtantibus. Hinc pro quavis Superficie propoſita variabilis $z$ æquabitur Functioni cuidam binarum variabilium $x$ & $y$. Atque viciſſim, ſi $z$ æqualis fuerit Functioni cui-

cunque ipſarum $x$ & $y$, tum iſta æquatio exhibebit Superficiem quampiam, cujus natura ex ipſa illa æquatione innoteſcet. Subſtituendis enim pro $x$ & $y$ omnibus, quos recipere poſſunt, valoribus, tam affirmativis quam negativis, omnia plani aſſumti puncta $Q$ obtinebuntur: tum vero ex æquatione ipſius $z$ per $x$ & $y$ conſtabit ubique longitudo perpendiculi $QM = z$, donec ad Superficiem, pertingat: qui ipſius $z$ valor ſi fuerit affirmativus, punctum Superficiei $M$ ſupra planum $APQ$, erit ſitum; ſin autem ſit negativus, infra hoc planum cadet; ſi evaneſcat, punctum Superficiei $M$ in hoc ipſo plano reperietur; at, ſi fuerit imaginarius, tum puncto $Q$ nullum prorſus Superficiei punctum $M$ reſpondebit. Quod ſi autem eveniat, ut $z$ habeat plures valores reales, tum recta ad planum normalis per punctum $Q$ ducta Superficiem in pluribus punctis $M$ trajiciet.

6. Quod igitur ad varias Superficierum naturas attinet, hic ſtatim ſe offert diſtinctio in continuas ſeu regulares, & diſcontinuas ſeu irregulares. Superficies ſcilicet continua erit, cujus omnia puncta per eandem æquationem inter $z$ & $x$ & $y$ exprimuntur ſeu; ubi $z$ eſt eadem Functio ipſarum $x$ & $y$ pro omnibus Superficiei punctis. Superficies autem irregularis eſt cujus variæ partes per diverſas Functiones exhibentur; uti, ſi propoſita fuerit Superficies, quæ in uno loco ſit ſphærica, in alio conica, ſeu cylindrica, ſeu plana. Hic autem Superficies irregulares penitus excludimus, atque ad ſolas regulares, quarum natura una quadam conſtanti æquatione contineatur, reſpiciemus. His enim pertractatis, quoniam Superficies irregulares ex partibus variarum regularium ſunt conflatæ, etiam iſtas facile dijudicare licebit.

7. Superficierum autem regularium primaria diviſio inſtituitur in algebraïcas & tranſcendentes. Superficies autem algebraïca vocatur, cujus natura exprimitur per æquationem algebraïcam inter Coordinatas $x$, $y$ & $z$; ſeu, quando $z$ æqualis eſt Functioni algebraïcæ ipſarum $x$ & $y$. Contra igitur, ſi $z$ non fuerit Functio algebraïca ipſarum $x$ & $y$; ſeu, ſi in æqua-

ſi $z$ definiatur per æquationem, in qua plures obtineat dimenſiones. Quam multiformis igitur futura ſit Functio $z$ facilime cognoſcetur, ſi æquatio inter $x$ & $y$ & $z$, ad rationalitatem perducatur.

10. De cetero, ſicuti in æquationibus pro Lineis curvis binas Coordinatas inter ſe permutari poſſe vidimus, ita in æquatione quavis pro Superficiei tres Coordinatæ $x$, $y$, & $z$ inter ſe ſunt permutabiles. Primo enim, ſi in plano $APQ$ altera recta $Ap$ ad $AP$ normalis pro Axe aſſumatur, erit nunc $Ap = y$, & $pQ = x$; ſicque binæ $x$ & $y$ inter ſe ſunt permutatæ. Reliquæ permutationes omnes intelligentur complendo parallelepipedon rectangulum $ApQM\xi\pi qPA$; in quo primum ſpectanda veniunt tria plana fixa inter ſe normalia $APQp$, $APq\pi$, & $Ap\xi\pi$; ad quæ ſingula, quemadmodum referatur Superficies propoſita cujus punctum eſt $M$, eadem æquatio inter $x$, $y$, & $z$ declarat. In unoquoque autem plano duplex datur Axis, uterque initium habens in puncto $A$, unde ſex diverſæ relationes inter tres Coordinatas reſultant.

Coordinatæ erunt

Pro plano $APQp$

vel $\begin{cases} AP = x \\ PQ = y \\ QM = z \end{cases}$

vel $\begin{cases} Ap = y \\ pQ = x \\ QM = z \end{cases}$

---

Pro plano $Apq\pi$

vel $\begin{cases} AP = x \\ Pq = z \\ qM = y \end{cases}$

vel $\begin{cases} A\pi = z \\ \pi q = x \\ qM = y \end{cases}$

$$\text{vel} \begin{cases} Ap = y \\ p\xi = z \\ \xi M = x \end{cases}$$

Pro plano $Ap\xi\pi$

$$\text{vel} \begin{cases} A\pi = z \\ \pi\xi = y \\ \xi M = x \end{cases}$$

Quod ſi autem a puncto fixo $A$ ad punctum Superficiei $M$ ducatur recta $AM$ erit ea $= \surd(xx + yy + zz)$.

11. Eadem ergo æquatio inter Coordinatas $x$, $y$, & $z$ cognitionem Superficiei ad tria plana exhibet, quæ inter ſe ſunt normalia atque ſe invicem in puncto $A$ decuſſant. Quemmadmodum ſcilicet variabilis $z$ diſtantiam cujuſque Superficiei puncti $M$ a plano $APQ$ exhibet, ita variabilis $y$ ejuſdem puncti $M$ diſtantiam a plano $APq$, & variabilis $x$ a plano $AP\xi$ præbet. Quod ſi autem noverimus, quantis intervallis punctum $M$ diſtet ab unoquoque horum trium planorum, tum ſimul ejus verus ſitus innoteſcit. Hæc igitur tria plana, ad quæ Superficies quævis per æquationem trium variabilium $x$, $y$ & $z$ refertur, imprimis notari debent; quorum ſi unum, uti $APQ$, fuerit horizontale, duo reliqua erunt verticalia, alterum ſcilicet horizontali ſecundum rectam $AP$ alterum ſecundum rectam $Ap$ inſiſtet.

12. Conſtitutis ergo his tribus planis inter ſe normalibus, ad quæ Superficies propoſita referatur, ex ſingulis ejus punctis $M$ ad iſta plana $APQ$, $APq$, & $A\pi\xi$ ducantur rectæ normales $MQ$, $Mq$, & $M\xi$, quæ erunt $MQ = z$, $Mq = y$, & $M\xi = x$. Deinde, completo parallelepipedo, habebuntur tres rectæ iſtis æquales, quæ ex puncto fixo $A$ egrediantur, ſcilicet $Ap = x$, $Ap = y$, & $A\pi = z$, ex quibus cognitis ſitus puncti $M$ determinatur. Manifeſtum autem eſt, ſi iſtæ variabiles $x$, $y$, & $z$, dum in plagas; quas Figura indicat, vergunt, affirmativæ cenſeantur, tum earum valores, ſi in plagas contrarias dirigantur, negativos cenſeri oportere.

13. Si

13. Si in æquatione inter tres variabiles $x$, $y$ & $z$ ea quæ ad planum $APQ$ eſt normalis, nempe $z$, ubique pares habeat dimenſiones, tum geminos habebit valores æquales, alterum affirmativum alterum negativum. Superficies igitur ita erit comparata, ut ad utramque plani $APQ$ partem ſit ſui ſimilis & æqualis, atque adeo Corpus, quod iſta Superficie terminatur, ſectione ſecundum planum $APQ$ facta, in duas partes ſimiles & æquales dividetur. Quemadmodum ergo in Figuris planis ea Linea recta, qua Figura in duas partes ſimiles & æquales dirimebatur, Diameter eſt appellata; ita in ſolidis id planum, quo Corpus in duas partes ſimiles dividitur, *Diametrale* vocemus. Quare, ſi variabilis $z$ in æquatione ubique pares habeat dimenſiones, tum planum $APQ$, erit diametrale. CAP. I.

14. Simili modo intelligitur, ſi in æquatione pro Superficie variabilis $y$, quæ ad planum $APq$ eſt normalis, ubique pares habeat dimenſiones, tum planum $APq$ fore diametrale. Sin autem variabilis $x$ pares ubique habeat dimenſiones, tum planum $Ap\xi$ erit diametrale. Ex æquatione ergo pro quavis Superficie inter tres variabiles $x$, $y$ & $z$ data ſtatim apparet, utrum ex tribus planis $APQ$, $APq$, $Ap\xi$, ſit diametrale an ſecus. Fieri autem poteſt, ut duo, imo omnia tria hæc plana, ſint diametralia. Scilicet, pro Globo, cujus Centrum ſit in $A$, ob radium $AM = \sqrt{(xx + yy + zz)} = a$, erit $xx + yy + zz = aa$, unde ſingulis hiſce tribus planis Globus in duas partes ſimiles & æquales diſpertietur.

15. Ad Figuram Superficiei, quæ in propoſita æquatione continetur, cognoſcendam, ad tria illa plana inter ſe normalia imprimis attendi oportet, quæ in Figura repræſentantur per $QQ'Q'Q'$, & $TT'T'T'$, atque $VV'V'V'$, atque ſe mutuo in puncto $A$ interſecant. Hæc tria plana, ſi in infinitum quaquaverſus producta concipiantur, univerſum ſpatium divident in octo regiones, quæ in Figura exhibentur litteris $AX, AX', AX'', AX''', AX^{4}, AX^{5}, AX^{6}$, & $AX^{7}$. Quod, ſi jam in prima regione $AX$ variabiles $x$, $y$ & $z$, TAB. XXX. *Fig.* 120.

APPEND. affirmativos valores habere ponantur, in reliquis regionibus una vel duæ omnes tres fient negativæ. Ratio autem horum valorum clariſſime ex ſequenti ſchemate perſpicietur

| Regio $AX$ | Regio $AX^1$ | Regio $AX^2$ | Regio $AX^3$ |
|---|---|---|---|
| $AP = +x$ | $AP' = -x$ | $AP = +x$ | $AP' = -x$ |
| $AR = +y$ | $AR = +y$ | $AR = +y$ | $AR = +y$ |
| $AS = +z$ | $AS = +z$ | $AS' = -z$ | $AS' = -z$ |
| Regio $AX^4$ | Regio $AX^5$ | Regio $AX^6$ | Regio $AX^7$ |
| $AP = +x$ | $AP' = -x$ | $AP = +x$ | $AP' = -x$ |
| $AR' = -y$ | $AR' = -y$ | $AR' = -y$ | $AR' = -y$ |
| $AS = +z$ | $AS = +z$ | $AS' = -z$ | $AS' = -z$ |

TAB. XXXI. *Fig.* 121. 16. Commodius autem erit octo has diverſas regiones numeris inſignire, quo facilius, de quanam ſermo ſit, indicare queamus. Cum igitur octo iſtæ regiones in puncto $A$ ſint confines, atque interſectione trium planorum inter ſe normalium diſtinguantur; plana autem hæc tribus rectis $Pp$, $Qq$, $Rr$ ſeſe in puncto $A$ normaliter decuſſantibus determinentur, regiones illæ tribus litteris $P$, $Q$, $R$, vel majuſculis vel minuſculis definiri poterunt. Regio ſcilicet principalis, ſeu prima, $PQR$ erit ſpatium, quod parallelepipedum ex tribus rectis $AP$, $AQ$, $AR$ in infinitum productis formatum complectitur; & regio $Pqr$ erit ſpatium, quod parallelepipedum ex tribus rectis $AP$, $Aq$, $Ar$ in infinitum productis formatum includet. Poſitis ergo tribus variabilibus $AP = x$, $AQ = y$, $AR = z$, erit utique $Ap = -x$, $Aq = -y$, & $Ar = -z$. Sequenti ergo modo octo has regiones numeris diſtinguemus, ut ſit

| | | |
|---|---|---|
| | prima I. $PQR$ | ſecunda II. $PQr$ |
| inter Coordinatas | $AP = +x$<br>$AQ = +y$<br>$AR = +z$ | $AP = +x$<br>$AQ = +y$<br>$Ar = -z$ |
| | tertia III. $PqR$ | quarta IV. $pQR$ |
| inter Coordinatas | $AP = +x$<br>$Aq = -y$<br>$AR = +z$ | $Ap = -x$<br>$AQ = +y$<br>$AR = +z$ |
| | quinta V. $Pqr$ | ſexta VI. $qQr$ |
| inter Coordinatas | $AP = +x$<br>$Aq = -y$<br>$Ar = -z$ | $Ap = -x$<br>$AQ = +y$<br>$Ar = -z$ |
| | ſeptima VII. $pqR$ | octava VIII. $pqr$ |
| inter Coordinatas | $Ap = -x$<br>$Aq = -y$<br>$AR = +z$ | $Ap = -x$<br>$Aq = -y$<br>$Ar = -z$ |

17. Regiones iſtæ vel magis vel minus a ſe invicem diſcrepant. Primo nimirum dantur binæ regiones, quæ duas Coordinatas habent communes, unica diſcrepante; ideoque plano ſe invicem tangunt, quas vocemus *conjunctas*. Deinde, ſi duæ Coordinatæ fuerint diverſæ, unicamque habeant communem, regiones Linea recta tantum ſe tangent, quas vocemus *diſjunctas*. Tertio, ſi omnes Coordinatæ ſignis diſſentiant, regiones tantummodo in puncto *A* ſe tangent, haſque *oppoſitas* vocabimus. Quæ jam regiones cuique ſint conjunctæ vel disjunctæ vel oppoſitæ ſequens tabella exhibebit.

APPEND.

| *Regio.* | *Conjunctæ.* | | | *Disjunctæ.* | | | *Oppoſitæ.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *PQR* I | *PQr* II | *PqR* III | *pQR* IV | *Pqr* V | *pQr* VI | *pqR* VII | *pqr* VIII |
| *PQr* II | *PQR* I | *Pqr* V | *pQr* VI | *PqR* III | *pQR* IV | *pqr* VIII | *pqR* VII |
| *PqR* III | *Pqr* V | *PQR* I | *pqR* VII | *PQr* II | *pqR* VIII | *pQR* IV | *pQr* VI |
| *qQR* IV | *pQr* VI | *pqR* VII | *PQR* I | *pqr* VIII | *PQr* II | *PqR* III | *Pqr* V |
| *Pqr* V | *PqR* III | *PQr* II | *pqr* VIII | *PQR* I | *pqR* VII | *pQr* VI | *pQR* IV |
| *pQr* VI | *pQR* IV | *pqr* VIII | *PQr* II | *pqR* VII | *PQR* I | *Pqr* V | *PqR* III |
| *pqR* VII | *pqr* VIII | *pQR* IV | *PqR* III | *pQr* VI | *Pqr* V | *PQR* I | *PQr* II |
| *pqr* VIII | *pqR* VII | *pQr* VI | *Pqr* V | *pQR* IV | *PqR* III | *PQr* II | *PQR* I |

18. Patet ergo quamlibet regionem habere tres ſibi conjuctas, totidem disjunctas, unicamque oppoſitam, atque ex Tabula præcedente ſtatim perſpicitur quemadmodum quælibet regio ad aliam quamcunque ſit comparata. Ordo autem, quem numeri regiones denotantes in iſta Tabula tenent, attentione eſt dignus; qui ut melius in oculos incurrat, eoſdem numeros eodem ordine quadrato ſequenti incluſi.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 1 | 5 | 6 | 3 | 4 | 8 | 7 |
| 3 | 5 | 1 | 7 | 2 | 8 | 4 | 6 |
| 4 | 6 | 7 | 1 | 8 | 2 | 3 | 5 |
| 5 | 3 | 2 | 8 | 1 | 7 | 6 | 4 |
| 6 | 4 | 8 | 2 | 7 | 1 | 5 | 3 |
| 7 | 8 | 4 | 3 | 6 | 5 | 1 | 2 |
| 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Cujus indoles & proprietates levi attentione percipientur, uſus vero in ſequentibus uberius ob oculos ponetur.

19. Ante jam annotavimus ſi in æquatione variabilis $z$ ubique habeat pares dimenſiones, tum Superficiem duas eſſe habituram partes ſimiles & æquales; pars ſcilicet in regione prima æqualis erit parti in ſecunda, ſimilique modo regiones tertia & quinta, item quarta & ſexta, ac denique ſeptima & octava inter ſe convenient, uti quadrati binæ ſeries ab 1 & 2 incipientes exhibent. Sin autem in æquatione varialis $y$ ubique pares habeat dimenſiones, tum regio prima cum tertia, ſecunda cum quinta, quarta cum ſeptima, & ſexta cum octava congruet. Sed ſi $x$ in æquatione ubique pares habeat dimenſiones, tum regio prima cum quarta, ſecunda cum ſexta, tertia cum ſeptima, & quinta cum octava congruet. Scilicet CAP. I.

*ſi in æquatione pares ubique habeat dimenſiones*

| | variabilis | |
|---|---|---|
| $z$ | $y$ | $x$ |
| convenient regiones | convenient regiones | convenient regiones |
| 1,2,3,4,5,6,7,8 | 1,2,3,4,5,6,7,8 | 1,2,3,4,5,6,7,8 |
| 2,1,5,6,3,4,8,7 | 3,5,1,7,2,8,4,6 | 4,6,7,1,8,2,3,5 |

20. Ut partes Superficiei in regionibus disjunctis prima & quinta ſitæ inter ſe ſint æquales, tum æquationem ita comparatam eſſe oportet, ut maneat eadem, etiamſi binæ variabiles $y$ & $z$ negativæ accipiantur. Hoc igitur eveniet ſi ambæ $y$ & $z$ in ſingulis æquationis terminis vel pares ubique vel impares dimenſiones junctim ſumtæ conſtituant. Quod ſi autem regio prima congruat cum quinta, tum ſecunda cum tertia, quarta cum octava, & ſexta cum ſeptima conveniet. Simili modo, ſi in æquatione pro Superficie binæ variabiles $x$ & $z$ vel parem ubique dimenſionum numerum, vel imparem ubique adimpleant, tum regio prima cum ſexta, ſecunda cum quarta, tertia cum octava, & quinta cum ſeptima congruet. Scilicet

APPEND.

*Si in æquatione pro Superficie ubique vel pares vel ubique impares adimpleant dimenſiones*

| | variabiles | |
|---|---|---|
| *y* & *z* | *x* & *z* | *x* & *y* |
| congruent regiones | congruent regiones | congruent regiones |
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 |
| 5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4 | 6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3 | 7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2 |

*Quod ſi autem omnes tres variabiles* x, y, & z *junctim conſideratæ ubique vel pares vel ubique impares teneant dimenſiones, tum convenient regiones oppoſitæ*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

21. Si ex his conditionibus duæ vel tres ſimul in æquatione ineſſe deprehendantur, tum vel quaternæ vel omnes octo regiones partes Superficiei ſimiles & æquales continebunt. Scilicet

*Si &* x *&* y *ſeorſim conſideratæ ubique pares obtineant dimenſiones,*
*tum ſequentes quaternæ regiones congruent*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2.

*Si &* x *&* z *ſeorſim conſideratæ ubique pares habeant dimenſiones,*
*tum ſequentes quaternæ regiones congruent*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3.

Digitized by Google

*Si variabiles* y *& z ſeorſim conſideratæ ubique pares habeant dimenſiones,* CAP. I.
*tum ſequentes quaternæ regiones congruent*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8 |
| 2, | 1, | 5, | 6, | 3, | 4, | 8, | 7 |
| 3, | 5, | 1, | 7, | 2, | 8, | 4, | 6 |
| 5, | 3, | 2, | 8, | 1, | 7, | 6, | 4. |

22. Si una variabilium ubique pares habeat dimenſiones, reliquæ vero binæ ſimul conſideratæ vel ubique pares vel ubique impares conſtituant dimenſiones, tum quoque quaternæ regiones congruent, ſequenti modo.

*Si z ubique pares habeat dimenſiones, &* x *&* y *ubique vel pares vel impares dimenſiones conſtituant,*
*tum ſequentes quaternæ regiones congruent*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8 |
| 2, | 1, | 5, | 6, | 3, | 4, | 8, | 7 |
| 7, | 8, | 4, | 3, | 6, | 5, | 1, | 2 |
| 8, | 7, | 6, | 5, | 4, | 3, | 2, | 1. |

*Si* y *ubique pares habeat dimenſiones, atque* x *&* z *ubique vel pares vel impares dimenſiones junctim conſtituant,*
*tum ſequentes quaternæ regiones congruent*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8 |
| 3, | 5, | 1, | 7, | 2, | 8, | 4, | 6 |
| 6, | 4, | 8, | 2, | 7, | 1, | 5, | 3 |
| 8, | 7, | 6, | 5, | 4, | 3, | 2, | 1. |

*Si* x *ubique pares habeat dimenſiones, atque* y *& z junctim conſideratæ ubique vel pares vel impares conſtituant dimenſiones,*
*tum ſequentes quaternæ regiones congruent*

Digitized by Google

APPEND.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8 |
| 4, | 6, | 7, | 1, | 8, | 2, | 3, | 5 |
| 5, | 3, | 2, | 8, | 1, | 7, | 6, | 4 |
| 8, | 7, | 6, | 5, | 4, | 3, | 2, | 1. |

His ergo tribus caſibus ſimul omnes tres variabiles $x$, $y$, & $z$ junctim conſideratæ ubique vel pares vel impares dimenſiones adimplebunt.

23. Superſunt ſequentes caſus quaternarum regionum æqualium.

*Si* x & y } *ubique vel pares vel ubique impares dimenſiones*
& y & z } *conſtituant*,
*tum ſequentes quaternæ regiones congruent*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8 |
| 5, | 3, | 2, | 8, | 1, | 7, | 6, | 4 |
| 7, | 8, | 4, | 3, | 6, | 5, | 1, | 2 |
| 6, | 4, | 8, | 2, | 7, | 1, | 5, | 3. |

Eædem ergo ſimilitudines prodeunt, ſi inſuper binæ reliquæ variabiles $x$ & $z$ ubique vel pares vel impares dimenſiones conſtituant, ita ut hæc conditio jam in propoſita contineatur. Portiones ergo Superficiei in quaternis disjunctis regionibus erunt inter ſe æquales, ſi in æquatione binæ quæque variabiles junctim conſideratæ ubique vel pares vel impares dimenſiones conſtituant. Cum autem tres dentur combinationes, notandum eſt ſi duæ expoſita proprietate fuerint præditæ, tum ſimul tertiam combinationem eadem proprietate eſſe gaviſuram.

24. Quod ſi ad conditiones, quæ quaternas regiones ſimiles & æquales produxerant, nova inſuper accedat in iis non contenta; quæ per ſe æqualitatem in binas regiones inferret, tum omnes prorſus regiones inter ſe fient æquales, atque Superficies conſtabit ex octo partibus inter ſe æqualibus & ſimilibus,

Digitized by Google

libus. Æquatio ergo pro hujuſmodi Superficiebus omnes haƈtemus memoratas proprietates conjunƈtim poſſidebit: ſcilicet, ſingulæ variabiles $x$, $y$, $z$ ſeorſim conſideratæ ubique pares conſtituent dimenſiones; ex quo jam ſequitur binas quaſque junƈtim conſideratas, atque etiam omnes tres ſimul ſumtas, ubique pares eſſe conſtituturas dimenſiones. 

25. Utrum autem æquatio inter tres variabiles propoſita una duabuſve vel adeo tribus exhibitarum proprietatum ſit prædita an non, id quidem, quod ad cujuſvis variabilis pares dimenſiones attinet, facile perſpicitur. Neque difficilius eſt inquirere, utrum omnes variabiles ſimul conſideratæ ubique vel pares vel impares conſtituant dimenſiones. At utrum binæ tantum ad hanc proprietatem ſint comparatæ, difficilius erit examinare. Ponatur in æquatione vel $x = nz$, vel $y = nz$, vel $x = ny$, ac diſpiciatur utrum uno alterove caſu æquatio reſultet, in qua variabilis $z$ duobus prioribus caſibus, vel $y$ poſtremo caſu, ubique induat pares dimenſiones: quod ſi eveniat, duæ variabiles junƈtim ſumtæ ubique vel pares vel impares dimenſiones conſtituant neceſſe eſt; hincque Superficies duas ſaltem habebit partes inter ſe ſimiles & æquales.

## CAPUT II.

### *De Seƈtionibus Superficierum a planis quibuſcunque factis.*

26. Quemadmodum interſeƈtiones Linearum ſunt punƈta, ita Superficierum interſeƈtiones ſunt Lineæ vel reƈtæ vel curvæ. Interſeƈtio duorum planorum eſt Linea reƈta, uti ex Elementis conſtat. Globi autem plano ſeƈti figura eſt Circulus. Plurimum autem ad cognitionem Superficiei affertur ſubſidii, ſi Lineas, quibus Superficies a datis planis interſecatur, noverimus. Hoc enim modo ſimul infinita Superficiei

APPEND. puncta innoteſcunt, cum modo præcedente ſinguli variabilis unius $z$ valores ſingula tantum Superficiei puncta præbeant.

TAB. XXXI. *Fig.* 121. 27. Cum igitur Superficies ad tria plana inter ſe normalia referamus, ante omnia inveſtigari conveniet interſectiones Superficiei & horum planorum. Sumto ergo primo plano $APQ$, quod variabilibus $AP=x$, $AQ=y$ determinatur, (quoniam tertia variabilis $z$ deſignat diſtantiam cujuſque Superficiei puncti ab hoc plano,) perſpicuum eſt, ſi ponatur $z=0$, ea Superficiei puncta inventum iri, quæ in ipſo plano $APQ$ ſint ſita, atque idcirco æquatio reſidua inter $x$ & $y$ exhibebit Lineam, qua Superficies a plano $APQ$ interſecatur. Simili modo, ſi ponatur $y=0$, æquatio inter $x$ & $z$ exprimet interſectionem Superficiei a plano $APR$ factam; atque, poſito $x=0$, æquatio inter $y$ & $z$ dabit interſectionem Superficiei & plani $AQR$.

28. Supra jam innuimus Superficiem Globi Centrum in puncto $A$ habentis, cujus radius $=a$, exprimi hac æquatione $xx+yy+zz=aa$; hoc ergo exemplo ad illuſtrationem harum interſectionum utar. Sit igitur $z=0$, atque æquatio $xx+yy=aa$, exhibebit interſectionem Globi a plano $APQ$ factam, quam ergo patet eſſe Circulum Centrum $A$ & radium $=a$, habentem. Simili modo, facto $y=0$, interſectio Globi a plano $APR$ facta erit Circulus æquatione $xx+zz=aa$, contentus. Eodemque modo, ſi ponatur $x=0$, æquatio $yy+zz=aa$; parem Circulum pro interſectione plani $AQR$ indicat. Hæc quidem ſunt ſatis nota, cum Sectiones Globi planis per ejus Centrum tranſeuntibus factæ omnes ſint Circuli maximi, ſeu cum Globo radium communem habentes.

29. Haud difficilius erit Sectiones Superficiei per plana alia uni iſtorum planorum principalium parallela factas determinare. Concipiatur planum plano $APQ$ parallelum ab eoque diſtans intervallo $=h$, omnia ergo Superficiei puncta, quorum ab eodem plano $APQ$ diſtantia, quæ per variabilem $z$ indicatur, eſt $=h$, ſimul in iſto plano parallelo ſita erunt, ideoque in-

terſectionem formabunt. Pro hac ergo interſectione æquatio habebitur, ſi in æquatione pro Superficie ponatur $z = h$; tum enim habebitur æquatio inter binas Coordinatas orthogonales $x$ & $y$ naturam Sectionis exprimens. Eodem autem modo ſectiones, quæ per plana vel ipſi $APR$ vel $AQR$ parallela fiunt, definientur, unde ſuperfluum foret, quæ de uno dicta ſunt, in reliquis repetere. 

30. Si ergo in æquatione pro Superficie inter tres Coordinatas $x$, $y$ & $z$, una earum $z$ ponitur conſtans $= h$, tum ſectio Superficiei per planum plano $APQ$ parallelum ab eoque intervallo $h$ diſtans formata oritur. Quod ſi ergo ſucceſſive huic litteræ $h$ omnes valores poſſibiles, tam affirmativi quam negativi, tribuantur, tum omnes ſectiones Superficiei, quæ a planis plano $APQ$ parallelis formantur, obtinentur: atque, cum tota Superficies hujuſmodi planis parallelis in partes infinitas diſſecari poſſit hocque modo omnes ſectiones cognoſcantur, ex iſtis omnibus ſectionibus tota Superficies innoteſcet. Omnes ſcilicet iſtæ ſectiones unica æquatione inter Coordinatas $x$ & $y$, conſtantem indeterminatam $h$ involvente, exprimentur; ex quo omnes iſtæ ſectiones erunt Lineæ vel ſimiles vel ſaltem affines una æquatione contentæ.

31. Omnes ergo ſectiones Superficiei plano $APQ$ parallelæ erunt inter ſe æquales, atque a planis $APR$, $AQR$ æquali modo trajicientur, ſi æquatio inter $x$ & $y$ ita fuerit comparata, ut eandem maneat quicunque valor ipſi $h$ tribuatur. Hoc autem evenire nequit, niſi variabilis $z$ cujus loco $h$ eſt poſita, prorſus deſit in æquatione pro Superficiei. Quo circa, ſi variabilis tertia $z$ in æquationem Superficiei omnino non ingrediatur, tum omnes ſectiones plano $APQ$ parallelæ erunt inter ſe æquales; quarum natura exprimetur ipſa Superficiei æquatione; cuippe, quæ duas tantum variabiles $x$ & $y$ involvit. Simili vero modo, ſi in æquatione pro Superficie vel variabilis $x$ vel $y$ deſit, tum omnes ſectiones vel plano $AQR$ vel plano $APR$ parallelæ inter ſe congruent.



Digitized by Google

APPEND. 32. Hujuſmodi ergo Superficies non ſolum animo facile concipitur, ſed etiam conſtruitur atque in data materia efformatur. Ponamus enim in æquatione deeſſe variabilem $z$, ita ut æquatio tantum ſit inter Coordinatas $AP = x$ & $AQ = PM = y$; ex hac in plano $APQ$ deſcribatur Linea curva $BMD$. Quo facto concipiatur Linea recta infinita ad planum hoc perpetuo normalis ſecundum Lineam hanc curvam $BMD$ circumferri; atque hæc recta motu ſuo producet ſeu efformabit Superficiem, per eam æquationem indicatam. Unde preſpicuum eſt, ſi Linea $BMD$ fuerit Circulus, tum Superficiem ex eo ortam fore Cylindri recti; ſin autem Linea $BMD$ fuerit Ellipſis, tum Superficiem Cylindri ſcaleni generari. Quod ſi Linea $BMD$ non fuerit continua, ſed ex pluribus rectis conflata figuram exhibens rectilineam, tum Superficies reſultabit priſmatica.

TAB. XXXI. Fig. 122.

33. Quod hoc Superficierum genus Cylindri & omnia Priſmata in ſe complectitur, univerſum hoc genus Superficierum appellari conveniet *cylindricum*, ſeu *priſmaticum*; ſingulæ autem ſpecies ſub hoc genere contentæ determinabuntur per figuram planam $BMD$, ex qua, modo ante deſcripto, ſint ortæ: atque iſta figura $BMD$ *Baſis* appellabitur. Quoties ergo in æquatione pro Superficie una trium variabilium $x$, $y$, $z$ deeſt, tum Superficies hac æquatione contenta erit cylindrica ſeu priſmatica. Quod ſi autem duæ variabiles $y$ & $x$ ſimul deſint; tum ob $x =$ Conſtanti, Linea $BMD$ abibit in rectam ad Axem $AD$ normalem, atque propterea Superficies fiet plana normalis ad planum $APQ$.

34. Poſt hoc Superficierum genus maxime notari meretur id, quod oritur ex æquatione inter tres variabiles $x$, $y$ & $z$ homogenea, ſeu in qua tres iſtæ variabiles ubique eundem dimenſionum numerum conſtituunt, cujuſmodi eſt $zz = mxz + xx + yy$. Hinc enim omnes ſectiones, quæ fiunt per plana uni ex tribus principalibus parallela, erunt figuræ inter ſe ſimiles. Namque, ſi tribuatur ipſi $z$ valor conſtans $h$, manifeſtum eſt æquationem $hh = mhx + xx + yy$, ſi pro $h$ ſucceſ-

ſive alii aliique valores tribuantur, infinitas continere figuras inter ſe ſimiles; quarum Parametri ſint æquales, ſeu proportionales ipſi *h*. Cum igitur hæ ſectiones non ſolum ſint ſimiles, ſed etiam creſcant in ratione diſtantiarum a plano *APQ*, Lineæ, quæ ex puncto *A* per ſingularum ſectionum puncta homologa ducuntur, erunt rectæ. CAP. II.

35. Propoſita ergo hujuſmodi æquatione inter tres variabiles *x*, *y*, & *z* homogenea, tribuatur ipſi *z* valor datus $AR = h$; ſitque *TSsMm* figura in plano ipſi *APQ* parallelo & per punctum *R* ducto, quam exhibebit æquatio inter *x* & *y*, ita ut ſit $RV = x$, & $VM = y$. Quod ſi ergo hæc ſectio una *TSsMm* fuerit deſcripta, concipiatur circa ejus Perimetrum circumduci Linea recta infinita perpetuo per punctum *A* tranſiens; atque hæc recta motu ſuo deſcribet Superficiem in æquatione propoſita contentam. Perſpicuum vero eſt, ſi figura *TSsMm* fuerit Circulus Centrum in *R* habens, tum prodire Conum rectum; ſin *R* non ſit Centrum, conum ſcalenum: at, ſi illa figura fuerit rectilinea, orientur cujuſque generis Pyramides. Quam ob rem Superficies, quæ in hoc æquationum generum continentur, hic *conicas* ſeu *pyramidales* vocabimus. TAB. XXXI. Fig. 123.

36. Ex his manifeſtum eſt, ſi æquatio inter tres variabiles *x*, *y* & *z* fuerit homogenea, atque adeo Superficies conica ſeu pyramidalis; tum non ſolum omnes ſectiones uni plano principali *APQ* parallelas inter ſe eſſe figuras ſimiles, quarum Parametri ſint diſtantiis ſectionum a vertice *A* proportionales; ſed, ob eandem rationem, intelligitur quoque, omnes ſectiones, quæ ſint vel plano *APR* vel plano *AQR* parallelæ, eadem illa proprietate eſſe præditas, ut ſint figuræ inter ſe ſimiles, quarum latera homologa teneant diſtantiarum ab *A* rationem. Infra vero oſtendetur, omnes omnino ſectiones hujuſmodi Corporum, quæ ſunt inter ſe parallelæ, ſeu quæ ſunt parallelæ plano cuicunque per Verticem *A* ducto, inter ſe quoque fore ſimiles, earumque Parametros diſtantiis a vertice *A* eſſe proportionales.

Digitized by Google

APPEND. 37. Latius patet genus Superficierum, ad quod nunc ſum progreſſurus. Sit Z Functio quæcunque ipſius $z$; ac proponatur æquatio quæcunque homogenea inter tres variabiles $x$, $y$, & $Z$, Fiat $Z = H$, poſita $z = h$: &, cum hoc caſu prodeat æquatio homogenea inter $x$, $y$ & H, erunt omnes ſectiones, plano $APQ$ parallelæ, figuræ inter ſe ſimiles, quarum Parametri autem non diſtantiis $h$, ſed earum Functionibus H erunt portionales. Ex quo Lineæ per harum ſectionum puncta homologa ductæ non erunt Lineæ rectæ, ſed Curvæ a Functionis $z$ ratione pendentes. Tum vero etiam hinc non ſequitur, ſectiones, quæ alio cuipiam plano ſint parallelæ, fore inter ſe ſimiles.

38. In hoc genere ambo præcedentia continentur. Si enim fuerit $Z = z$, ſeu $Z = \alpha z$, ob æquationem inter $x$, $y$ & $z$ homogeneam, orientur Superficies conicæ. Idem evenit, ſi fuerit $Z = \alpha + \beta z$; hoc tantum diſcrimine, quod Vertex Coni non in ipſum punctum $A$ cadat; ſcilicet, ſi fuerit $Z = \frac{b - z}{b}$, Vertex Coni ab $A$ diſtabit intervallo $b$. Quod ſi jam ſtatuatur $b = \infty$, figura conica abibit in cylindricam, fietque $Z = 1$. Hinc æquatio pro Superficiebus cylindricis ita erit comparata, ut in ea variabiles $x$ & $y$ una cum conſtanti 1 ubique eundem dimenſionum numerum adimpleant. Quomodocunque autem æquatio inter $x$ & $y$ fuerit comparata, ſi tertia variabilis $z$ in eam non ingrediatur, ſemper per unitatem homogeneitas impleri poteſt: unde, uti ſupra jam oſtendimus, omnis æquatio una variabili carens exprimit Superficiem cylindricam.

39. Inter hæc Corpora, in quibus omnes ſectiones, uni plano principali $APQ$ parallelæ, ſunt figuræ ſimiles, maxime notatu ſunt digna ea, quorum iſtæ ſectiones ſunt Circuli Centra in eadem recta $AR$ ad planum $APQ$ normali habentes. Hujuſmodi Corpora torno efformantur, indeque *tornata* appellantur. Pro hujuſmodi ergo Corporibus æquatio generalis erit $ZZ = xx + yy$: quicunque enim valor variabili $z$ tribua-

Digitized by Google

tur, ut fiat $Z = H$, prodibit pro ſectione plano $APQ$ parallela æquatio $HH = xx + yy$, quæ eſt pro Circulo radium $= H$ & Centrum in recta $AR$ habente. Si fuerit $ZZ = zz$, habebitur Conus rectus: ſin $ZZ = aa$, Cylindrus; &, ſi $ZZ = aa - zz$ prodibit Globus, quæ ſunt ſpecies præcipuæ Corporum tornatorum. 

40. Contemplemur ejuſmodi Corpora, quorum omnes ſectiones $PTV$ normales ad Axem $AP$ ſint Triangula, horumque Apices $T$ in Linea recta $DT$ Axi $AP$ parallela ſitæ. Sit $AVB$ Baſis hujus Corporis, ſeu ejus ſectio in plano $APQ$ facta, quæ ſit Curva quæcunque. Sit diſtantia rectæ $DT$ ab Axe $AB$, nempe $AD$, $= c$: poſitiſque, ut hactenus, tribus variabilibus $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$; erit $PV$ Functio quæpiam ipſius $x$: ſit ea $PV = P$: erit, ob triangula $VQM$, $VPT$ ſimilia, $P : c = P - y : z$; ſeu $z = c - \frac{cy}{P}$. Pro hujuſmodi ergo Corporibus æquabitur $\frac{c - z}{y}$ Functioni cuipiam ipſius $x$. Differunt igitur hæc Corpora a conicis, quod deſinant in aciem rectam $DT$, cum conica deſinant in cuſpidem. Si Baſis $AVB$ ponatur Circulus, Corpus reſultans a WALLISIO fuſius eſt pertractatum, atque *Cono-cuneus* appellatum. TAB. XXXII. *Fig.* 124.

41. Sint, ut modo, omnes ſectiones Axi $AB$ normales $PTV$ triangula ad $P$ rectangula, quorum Vertice autem $T$ conſtituant Curvam quamcunque $AT$: Baſis autem ſit figura $AVB$. Poſitis tribus variabilibus $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; erit in Curva $AVB$, recta $PV$ Functio quædam ipſius $x$ quæ ſit $= P$: tum vero erit $PT$ quoque Functio ipſius $x$, quæ ſit $= Q$; quibus poſitis erit TAB. XXXII. *Fig.* 125.

$$P : Q = P - y : z;$$

ideoque $z = Q - \frac{Qy}{P}$, ſeu $Pz + Qy = PQ$, vel $\frac{z}{Q} + \frac{y}{P} = 1$, vel conſtanti. Quod ſi ergo in æquatione ambæ

Digitized by Google

APPEND. variabiles $y$ & $z$ una plures dimenſiones nuſquam conſtituant, tum Corpus ad hoc genus pertinebit, quod hic deſcripſimus.

TAB. XXXII. Fig. 126. 42. Quoniam jam ſumus contemplati ea Corpora, quorum omnes ſectiones, uni plano principali parallelæ, ſunt inter ſe ſimiles: nunc ea conſideremus, in quibus omnes iſtiuſmodi ſectiones ſint figuræ inter ſe ſaltem affines; ſeu, quæ, ſumtis Abſciſſis homologis, habeant Applicatas inter ſe proportionales. Sint igitur hujuſmodi Corporis tres ſectiones principales $ABC$, $ACD$, & $ABD$, quarum iſti $ACD$ omnes ſectiones parallelæ debeant eſſe figuræ affines. Quare in ea ponatur Baſis $AC = a$, & altitudo $AD = b$; ſumtiſque Coordinatis $Aq = p$, & $qm = q$, ſit $q$ Functio quæcunque ipſius $p$. Concipiatur nunc ſectio quæcunque parallela $PTV$, poſito intervallo $AP = x$; eritque Baſis $PV =$ Functioni ipſius $x$, quæ ſit $= P$, & altitudo $PT =$ Functioni ipſius $x$, quæ ſit $= Q$. Vocetur jam $PQ = y$ & $QM = z$; atque, ex affinitatis natura, erit $a : p = P : y$ & $b : q = Q : z$; ſeu $y = \frac{Pp}{a}$, & $z = \frac{Qq}{b}$.

43. Quod ſi ergo datæ fuerint omnes tres ſectiones principales Corporis, $ABC$, $ACD$, & $ABD$; hinc natura ipſius Corporis determinabitur, quod habeat omnes ſectiones, ipſi $ACD$ parallelas, ſimul eidem affines. Primum enim dantur P & Q Functiones ipſius $x$; tum vero eſt $q$ Functio ipſius $p$; unde, ex binis variabilibus $x$ & $p$, definiuntur ambæ variabiles $y$ & $z$. Verum, ſi æquationem inter tres Coordinatas $x$, $y$ & $z$ deſideremus; quoniam $q$ eſt Functio ipſius $p$; ſeu, quia datur æquatio inter $p$ & $q$, in hac æquatione ſubſtituatur $p = \frac{ay}{P}$, & $q = \frac{bz}{Q}$; ſicque, ob P & Q Functiones ipſius $x$, orietur æquatio inter tres Coordinatas $x$, $y$ & $z$, qua natura Corporum ad hoc genus pertinentium exprimetur. Patet autem, poſito $x = 0$, fieri oportere $P = a$ & $Q = b$.

44. Si

44. Si in æquatione pro Superficie duæ variabiles $y$ & $z$ ubique eundem dimenſionum numerum conſtituant, tum omnes ſectiones ad Axem $AP$ normales erunt figuræ rectilineæ. Poſito enim pro $x$ valore quocunque conſtante, prodibit æquatio inter $y$ & $z$ homogenea, quæ unam pluresve Lineas rectas indicat. Cum igitur numerus dimenſionum, qui a binis $y$ & $z$ conſtituitur, ubique ſit idem, vel par erit vel impar; & hanc ob rem, uti ſupra §. 20. oſtenſum eſt, hujuſmodi Corpora binas habebunt partes inter ſe æquales. Scilicet portiones in regionibus prima & quinta inter ſe erunt ſimiles, tum vero etiam in regione ſecunda & tertia, & ita de ceteris, uti Tabella loco citato indicat. CAP. II.

45. Jam plures hic contemplati ſumus Corporum ſpecies, in quibus dantur infinitæ ſectiones rectilineæ; veluti hanc ultimo pertractatam, & cylindricas atque conicas. Hæ vero ita ſunt comparatæ ut ſectiones per Axem $AP$ factæ ſint rectilineæ; hoc autem genus latius patet. Sit enim $AKMP$, ſectio Corporis per Axem $AP$ facta, ad angulum $MPV = \varphi$; poſitis $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$, erit $\frac{z}{y}$ Tangens anguli $\varphi$; & recta $PM = \frac{z}{\text{ſin.}\,\varphi}$. Quod ſi jam Linea $KM$ ſit recta, debebit eſſe $\frac{z}{\text{ſin.}\,\varphi} = \alpha x + \beta$; ubi $\alpha$ & $\beta$ erunt conſtantes ab angulo $\varphi$ pendentes: ideoque erunt Functiones nullius dimenſionis ipſarum $y$ & $z$. Sint R & S hujuſmodi Functiones: eritque $x = \mathrm{R}z + \mathrm{S}$; ſeu $x = \mathrm{R}y + \mathrm{S}$. Vel, denotante T Functionem unius dimenſionis, & S nullius dimenſionis ipſarum $y$ & $z$, omnia hujuſmodi Corpora continebuntur in hac æquatione generali $x = \mathrm{T} + \mathrm{S}$. TAB. XXXII. Fig. 127.

46. Quæcunque autem fuerit propoſita Superficies, cujus natura per æquationem inter tres variabiles $x$, $y$, & $z$ definiatur, facile erit ejus ſectionem quamvis ſecundum Axem $AP$ factam determinare. Sit enim angulus $VPM$, quo iſta

APPEND. ſectio $AKMP$ ad planum $ACVP$ inclinatur, $= \varphi$; & ponatur recta $PM = v$, quæ erit Applicata ſectionis quæſitæ; quo facto habebitur $QM = z = v. ſin. \varphi$ & $PQ = y = v. coſ. \varphi$. Quod ſi ergo in æquatione pro Superficie loco variabilium $y$ & $z$ iſti valores $v. coſ. \varphi$ & $v. ſin. \varphi$ ſubſtituantur, orietur æquatio inter duas variabiles $x$ & $v$, qua natura ſectionis $AKMP$ exprimetur. Simili vero modo omnes quoque ſectiones, quæ fiunt ſecundum alterutrum binorum reliquorum Axium principalium $AQ$ vel $AR$, invenientur. Tres enim iſti Axes $AP$, $AQ$ & $AR$, a quibus tres variabiles $x$, $y$ & $z$ pendent, ita inter ſe ſunt permutabiles, ut perpetuo, quicquid de eorum uno docetur, ad binos reliquos transferatur.

TAB. XXXI. Fig. 121.

47. Sumto ergo plano $APQ$ pro norma, ad quod omnes ſectiones Superficiei referantur; ſectio quæcunque plano facta vel erit parallela huic plano, vel ad id erit inclinata; hocque caſu planum ſectionis continuatum alicubi interſecabit planum $APQ$, atque interſectio iſtorum planorum erit Linea recta. Priori quidem caſu, quo planum ſectionis parallelum eſt plano $APQ$, natura ſectionis innoteſcet tribuendo quantitati $z$ valorem conſtantem. Poſteriori vero caſu, quo planum ſectionis ad planum $APQ$ inclinatur, naturam ſectionis adhuc tantum definire licet, vel recta $AP$ vel recta $AQ$ fuerit interſectio plani ſecantis cum plano $APQ$. Ad omnes ergo omnino ſectiones eruendas ſupereſt, ut quaſcunque alias binorum illorum planorum interſectiones contemplemur.

TAB. XXXIII. Fig. 128.

48. Sit recta $ES$, Axi $AP$ parallela, interſectio plani ſecantis cum plano $APQ$: angulusque inclinationis $QSM$, quo planum ſecans $ESM$ ad planum $APQ$ inclinatur, ponatur $= \varphi$, & diſtantia $AE$ vocetur $= f$. Cum jam ſit $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit $ES = x$, & $QS = y + f$. Quod ſi ergo ſectio ad rectam $ES$ tanquam Axem referatur, erit Abſciſſa $ES = x$, Applicata vero $SM$ ponatur $= v$; unde, ob angulum $QSM = \varphi$, obtinebitur $QM = z = v. ſin. \varphi$, & $SQ = y + f = v. coſ. \varphi$, hincque $y = v. coſ. \varphi - f$. Quare, ſi in æquatione pro Superficie

inter $x$, $y$, & $z$, ſubſtituatur $y = v.\,coſ.\,\varphi - f$ & $z = v.\,ſin.\,\varphi$, orietur æquatio inter Coordinatas $x$ & $v$ ſectionis $ESM$; quæſitæ. Si interſectio $ES$ eſſe, normalis ad Axem $AP$; tum, quia foret parallela alteri Axi principali in plano $APQ$ exiſtenti, permutandis variabilibus $x$ & $y$, ſectio eodem modo invenietur. CAP. II.

49. Habeat jam interſectio $ES$ in plano $APQ$ poſitionem quamcunque; cui recta $AE$, ad Axem $AP$ normalis, occurrat in puncto $E$. Tum ducatur $ETX$ Axi $AP$ parallela, & ponatur $AE = f$, & angulus $TES = \theta$. Sumtis porro tribus variabilibus $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; ex $Q$ ad $ES$ ducatur normalis $QS$, & jungatur, recta $MS$, erit angulus $QSM$ inclinatio plani ſecantis ad planum $APQ$, qui ponatur $= \varphi$. Deinde vero ſint ſectionis quæſitæ Coordinatæ $ES = t$ & $SM = v$. Ex $S$ ad $EX$ & $QP$ productam ducantur perpendicula $ST$ & $SV$; eritque $QM = z = v.\,ſin.\,\varphi$; $QS = v.\,coſ.\,\varphi$; $SV = v.\,coſ.\,\varphi.\,ſin.\,\theta$, & $QV = v.\,coſ.\,\varphi.\,coſ.\,\theta$. Poſtea vero, erit $ST = VX = t.\,ſin.\,\theta$, & $ET = t.\,coſ.\,\theta$. Ex his colligitur tandem $AP = x = t.\,coſ.\,\theta + v.\,coſ.\,\varphi.\,ſin.\,\theta$, & $PQ = y = v.\,coſ.\,\varphi.\,coſ.\,\theta - t.\,ſin.\,\theta - f$; qui valores, ſi loco $x$, $y$ & $z$ ſubſtituantur, dabunt æquationem pro ſectione quæſita. TAB. XXXIII. Fig. 129.

50. Data ergo æquatione pro Solido quocunque, ex ea facile elici poteſt æquatio pro Sectione ejus quacunque plana. Ac primo quidem perſpicuum eſt, ſi æquatio pro Solido inter tres Coordinatas $x$, $y$ & $z$, fuerit algebraïca, tum quoque omnes ejus ſectiones fore Curvas algebraïcas. Deinde vero, cum æquatio inter Coordinatas ſectionis $t$ & $v$ oriatur, ponendo in æquatione pro Solido $z = v.\,ſin.\,\varphi$, $x = t.\,coſ.\,\theta + v.\,coſ.\,\varphi.\,ſin.\,\theta$, & $y = v.\,coſ.\,\varphi.\,coſ.\,\theta - t.\,ſin.\,\theta - f$, manifeſtum eſt in æquatione pro quavis ſectione Coordinatas $t$ & $v$ plures dimenſiones obtinere non poſſe, quam in æquatione pro Solido tres Coordinatæ $x$, $y$ & $z$ conſtituant. Fieri tamen quandoque poteſt ut æquatio pro ſectione ad ordinem



Digitized by Google

APPEND. inferiorem referatur; ſupremis ſcilicet membris, poſt ſubſtitutionem, ſe tollentibus.

51. Si igitur in æquatione pro Superficie tres variabiles $x$, $y$ & $z$ unicam tantum conſtituant dimenſionem, ita ut æquatio ſit hujuſmodi $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$; tum omnes hujus Superficiei ſectiones erunt Lineæ rectæ. Erit autem hoc caſu Superficies plana; uti, cum attendenti facile patebit, tum infra clarius oſtendetur: atqui ex Elementis notum eſt ſectionem duorum planorum Lineam rectam eſſe oportere. Simili modo hinc intelligitur omnium Solidorum, quorum natura hac generali æquatione contineatur

$$\alpha x^2 + \zeta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \epsilon xz + \zeta yz + ax + by + cz + ee = 0;$$

ſingulas ſectiones, niſi ſint Lineæ rectæ, Lineas ſecundi ordinis eſſe debere, neque ullam dari ſectionem, cujus natura per æquationem ſecundi gradus exprimi nequeat.

---

## CAPUT III.

### *De ſectionibus Cylindri, Coni & Globi.*

52. QUONIAM hæc Corpora in Elementis Stereometriæ conſiderari ſolent, eorum ſectiones hic antea inveſtigari conveniet, quam ad Solida alia minus nota progrediamur. Primum igitur, Cylindrorum duæ occurrunt ſpecies in Elementis, *rectorum* ſcilicet ac *ſcalenorum.* Cylindrus *rectus* vocatur, cujus omnes ſectiones ad Axem normales ſint Circuli inter ſe æquales, atque Centra in eadem Linea recta diſpoſita habentes. Cylindrus autem *ſcalenus* ſectiones ad Axem, non normales ſed ſub dato angulo inclinatas, habet circulares; quæ affectio commodius ita exprimetur, ut dicamus Cylindrum obliquum ſeu ſcalenum eſſe cujus omnes ſectiones

ad Axem normales ſint Ellipſes æquales, quarum Centra in eadem Linea recta, quæ Axis Cylindri vocatur, ſint poſita. CAP. III.

53. Sit igitur Cylindrus, ſive rectus ſive ſcalenus, cujus Axis $CD$ perpendiculariter inſiſtat plano tabulæ; ſitque ejus Baſis $AEBF$, ſeu ſectio a plano tabulæ formata, vel Circulus vel Ellipſis. Aſſumam vero hanc Baſin eſſe Ellipſin quamcunque, Centrum in $C$ & Axes conjugatos $AB$ & $EF$ habentem; quoniam, quæ de Cylindro ſcaleno tradentur, facillime ad rectum accommodabuntur. Ponatur ergo alter ſemiaxis $AC = BC = a$, alter vero $CE = CFc =$; poſitis nunc tribus Coordinatis $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Ellipſis, $aacc = aayy + ccxx$; quæ eadem æquatio exprimet naturam Cylindri, cum tertia variabilis $z$, ob omnes ſectiones plano $CPQ$ parallelas inter ſe æquales, in æquationem non ingrediatur. TAB. XXXIII. Fig. 130.

54. Hujus ergo Cylindri omnes ſectiones Baſi parallelæ eidem erunt ſimiles & æquales. Scilicet Circuli in Cylindro recto & Ellipſes in ſcaleno. Tum vero ſectiones, quæ fiunt ſecundum plana ad $APQ$ normalia, erunt Lineæ rectæ, binæ inter ſe parallelæ, quæ, ubi Cylindrus tangetur a plano, in unum coaleſcent; atque adeo imaginariæ evadunt, ſi planum Cylindro prorſus non occurrat. Hoc ipſum ex æquatione ſponte ſequitur; ſi enim vel $x$ vel $y$ vel $x \pm \alpha y$ ponatur conſtans ad denotandam interſectionem plani ſecantis & Baſis, tum æquatio duas habebit radices ſimplices. Sicque determinavimus jam ſectiones omnes, quæ fiunt per plana, uni trium planorum principalium parallela.

55. Ad naturam reliquarum ſectionum indagandam, ponamus planum ſecans cum plano Baſis interſectionem conſtituere rectam Lineam $GT$, quæ primo ſit parallela alteri Axi conjugato $EF$, ſeu ad alterum $AB$ productum in $G$ normalis. Hoc poſito, ſit diſtantia $CG = f$, & inclinatio plani ſecantis $GTM$ ad Baſim menſuretur angulo $= \varphi$. Occurrat planum ſecans $GTM$ Axi Cylindri in $D$; &, ducta recta $DG$, erit

Digitized by Google

APPEND. $DGC = \varphi$, ac propterea $DG = \frac{f}{coſ.\,\varphi}$ & $CD = \frac{f.\,ſin.\,\varphi}{coſ.\,\varphi}$. Ex ſectionis quæſitæ puncto quovis $M$ ducatur $MT$ parallela ipſi $DG$: atque, ob $TQ = f - x$, & angulum $QTM = \varphi$, erit $TM = \frac{f - x}{coſ.\,\varphi}$ & $QM = \frac{(f - x).\,ſin.\,\varphi}{coſ.\,\varphi} = z$. Ducatur $MS$ parallela ipſi $TG$, ideoque normalis in $DG$, erit $MS = TG = PQ = y$, & $DS = \frac{x}{coſ.\,\varphi}$.

56. Sumantur nunc rectæ $DS$ & $SM$ pro Coordinatis ſectionis quæſitæ; ſitque $DS = t$, & $SM = u$. Hinc erit $y = u$, $x = t.\,coſ.\,\varphi$: &, ob $z = \frac{(f - x).\,ſin.\,\varphi}{coſ.\,\varphi}$, erit $z = f.\,tang.\,\varphi - t.\,ſin.\,\varphi$: Subſtituantur iſti valores in æquatione pro Cylindro $aacc = aayy + ccxx$, atque reſultabit pro ſectione quæſita iſta æquatio $aacc = aauu + cctt\,(coſ.\,\varphi)^2$: quæ indicat ſectionem fore Ellipſin Centrum in puncto $D$ habentem, cujus alter Axis principalis in rectam $DG$ cadat, alter vero ad hunc ſit normalis. Erit vero ſemiaxis in rectam $DG$ cadens (facto $u = 0$) $= \frac{a}{coſ.\,\varphi}$. Vel, ducatur recta $BH$ parallela ipſi $GD$, erit $BH = \frac{a}{coſ.\,\varphi}$ alter ſemiaxis ſectionis quæſitæ, alter vero conjugatus erit $= c = CE$.

57. Erit ergo ſectio Cylindri hoc modo orta Ellipſis, cujus ſemiaxes conjugati erunt $\frac{a}{coſ.\,\varphi}$ & $c$. Quod ſi ergo in Baſi $AEBF$ fuerit $AC = a$ ſemiaxis major; tum, ob $\frac{a}{coſ.\,\varphi}$ majorem quam $a$, ſectiones erunt Ellipſes magis oblongæ, quam Baſis. Sin autem fuerit $c$ minor quam $a$: ſeu, ſi interſectio $GT$ fuerit Axi majori Baſis parallela, tum fieri poteſt ut in ſectione ambo Axes fiant inter ſe æquales, atque adeo ſectio Circulus evadat. Eveniet hoc ſi fuerit $\frac{a}{coſ.\,\varphi} = c$, ſeu $coſ.\,\varphi =$

$\frac{a}{c}$. Cum igitur ſit in Triangulo $BCH$ ad $C$ rectangulo angulus $CBH = \varphi$, erit $cof. \varphi = \frac{BC}{BH} = \frac{a}{BH}$. Quare, ſi ſumatur $BH = CE$, ſectiones erunt Circuli, quod cum duplici modo fieri queat, rectam $BH = CE$ ſive ſupra ſive infra conſtituendo, binæ exiſtent ſectionum circularium ſeries, quæ ad Axem $CD$ oblique erunt inclinatæ; ex quo hujuſmodi Cylindri ſcaleni appellantur.

58. Sit nunc recta $GT$, utcunque oblique poſita, interſectio plani ſecantis cum Baſi, ad quam ex Centro Baſis $C$ demittatur perpendiculum $GC = f$; & ponatur angulus $BCG = \theta$; ſitque angulus inclinationis $CGD = \varphi$, cui æqualis erit angulus $QTM$, ducta $QT$ ad $GT$ normali. Erit ergo $DG = \frac{f}{cof. \varphi}$, & $CD = \frac{f. ſin. \varphi}{cof. \varphi}$. Sit $M$ punctum in ſectione quæſita, unde ad Baſin perpendiculum $MQ$ hincque porro ad Axem $QP$ demittatur; ita ut, vocatis $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, ſit $aacc = aayy + ccxx$. Ducantur porro ad interſectionem $GT$ normales $PV$, $QT$; erit $GV = x. ſin. \theta$, $PV = f - x. cof. \theta$; &, ob angulum $QPW = \theta$, fiet $QW = y. ſin. \theta$, $PW = VT = y. cof. \theta$, & $QT = f - x. cof. \theta + y. ſin. \theta$. Denique, ducta $MT$, ob angulum $MTQ = \varphi$, erit $TM = \frac{z}{ſin. \varphi}$ & $QT = \frac{z. cof. \varphi}{ſin. \varphi}$. Tab. XXXIV. Fig. 131.

59. Compleatur parallelogrammum rectangulum $GSMT$; & vocetur $DS = t$, $SM = GT = u$: eritque $u = GV + VT = x. ſin. \theta + y. cof. \theta$. At, ob $QT = f - x. cof. \theta + y. ſin. \theta$, erit $QT - CG = y. ſin. \theta - x. cof. \theta$, ex quo fit $DS = TM - DG = \frac{y. ſin. \theta - x. cof. \theta}{cof. \varphi} = t$. Cum igitur ſit $x. ſin. \theta + y. cof. \theta = u$, & $y. ſin. \theta - x. cof. \theta = t. cof. \varphi$, habebitur $y = u. cof. \theta + t. ſin. \theta. cof. \varphi$, & $x = u. ſin. \theta - t. cof. \theta. cof. \varphi$. Qui valores in æquatione $aacc = aayy + ccxx$ loco $x$ & $y$ ſubſtituti dabunt.

Digitized by Google

Append.

$$aacc = \frac{aauu\,(\text{coſ. }\theta)^2 + 2aaut.\,\text{ſin. }\theta.\,\text{coſ. }\theta.\,\text{coſ. }\varphi + aatt\,(\text{ſin. }\theta)^2\,(\text{coſ. }\varphi)^2}{ccuu\,(\text{ſin. }\theta)^2 - 2ccut.\,\text{ſin. }\theta.\,\text{coſ. }\theta.\,\text{coſ. }\varphi + cctt\,(\text{coſ. }\theta)^2\,(\text{coſ. }\varphi)}$$

quam æquationem patet eſſe ad Ellipſin, cujus Centrum ſit in $D$, at Coordinatæ $DS$ & $SM$ ad Axes principales non ſint normales, niſi ſit $a = c$ ſeu Cylindrus rectus.

Tab. XXXIV. Fig. 132. 60. Ad hanc ſectionem propius cognoſcendam, ſit $aMebf$ Curva, cujus æquatio eſt inventa inter Coordinatas $DS = t$ & $MS = u$; ſitque, brevitatis ergo iſta æquatio $aacc = \alpha uu + 2\beta tu + \gamma tt$; ita, ut pro caſu præſente, habeatur

$$\alpha = aa\,(\text{coſ. }\theta)^2 + cc\,(\text{ſin. }\theta)^2$$

&

$$\beta = (aa - cc).\,\text{ſin. }\theta.\,\text{coſ. }\theta.\,\text{coſ. }\varphi$$

atque

$$\gamma = aa\,(\text{ſin. }\theta)^2(\text{coſ. }\varphi)^2 + cc\,(\text{coſ. }\theta)^2(\text{coſ. }\varphi)^2.$$

Sint hujus ſectionis $ab$ & $ef$ Axes principales conjugati, ductaque ad eorum alterutrum Applicata $Mp$, vocetur $Dp = p$ & $Mp = q$; ac ponatur angulus $aDH = \zeta$; erit $u = p.\,\text{ſin. }\zeta + q.\,\text{coſ. }\zeta$ & $t = p.\,\text{coſ. }\zeta - q.\,\text{ſin. }\zeta$, quibus valoribus ſubſtitutis, fiet

$$aacc = \begin{array}{l} +\alpha\,(\text{ſin. }\zeta)^2 \\ +2\beta.\,\text{ſin. }\zeta.\,\text{coſ. }\zeta \\ +\gamma.\,(\text{coſ. }\zeta)^2 \end{array} pp \begin{array}{l} +2\alpha.\,\text{ſin. }\zeta.\,\text{coſ. }\zeta \\ +2\beta.\,(\text{coſ. }\zeta)^2 \\ -2\beta.\,(\text{ſin. }\zeta)^2 \\ -2\gamma.\,\text{ſin. }\zeta.\,\text{coſ. }\zeta \end{array} pq \begin{array}{l} +\alpha\,(\text{coſ. }\zeta)^2 \\ -2\beta.\,\text{ſin. }\zeta.\,\text{coſ. }\zeta \\ +\gamma.\,(\text{ſin. }\zeta)^2 \end{array} qq$$

61. Hæc jam æquatio cum referatur ad Diametrum orthogonalem, coëfficiens ipſius $pq$ debet eſſe $= 0$: unde, ob $2.\,\text{ſin. }\zeta.\,\text{coſ. }\zeta = \text{ſin. }2\zeta$, & $(\text{coſ. }\zeta)^2 - (\text{ſin. }\zeta)^2 = \text{coſ. }2\zeta$, fiet $(\alpha - \gamma).\,\text{ſin. }2\zeta + 2\beta\,\text{coſ. }\zeta\,2 = 0$: ideoque $\text{tang. }2\zeta = \frac{2\beta}{\gamma - \alpha}$: unde angulus $aDH$, ac proinde poſitio Diametrorum principalium cognoſcitur. Hinc porro ipſi ſemiaxes definiuntur, hoc modo,

$aD =$

$$aD = \frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\text{ſin}.\zeta)^2 + 2\beta.\,\text{ſin}.\zeta.\ \text{coſ}.\zeta + \gamma(\text{coſ}.\zeta)^2)}}$$

&

$$eD = \frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\text{coſ}.\zeta)^2 - 2\beta.\,\text{ſin}.\zeta.\ \text{coſ}.\zeta + \gamma(\text{ſin}.\zeta)^2)}}.$$

62. Quia eſt $2\beta = \frac{2(\gamma-\alpha).\,\text{ſin}.\zeta.\,\text{coſ}.\zeta}{\text{coſ}.\zeta^2 - \text{ſin}.\zeta^2}$, erit, valore hoc in expreſſionibus inventis ſubſtituto,

$$aD = \frac{ac\sqrt{(\text{coſ}.\zeta^2 - \text{ſin}.\zeta^2)}}{\sqrt{(\gamma.\,\text{coſ}.\zeta^2 - \alpha.\,\text{ſin}.\zeta^2)}} = \frac{ac\sqrt{2.\,\text{coſ}.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha+\gamma).\,\text{coſ}.2\zeta - \alpha + \gamma)}}$$

&

$$eD = \frac{ac\sqrt{(\text{coſ}.\zeta^2 - \text{ſin}.\zeta^2)}}{\sqrt{(\alpha.\,\text{coſ}.\zeta^2 - \gamma.\,\text{ſin}.\zeta^2)}} = \frac{ac\sqrt{2.\,\text{coſ}.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha+\gamma).\,\text{coſ}.2\zeta + \alpha - \gamma)}}.$$

Horum ergo ſemiaxium productum erit

$$aD.eD = \frac{2aacc.\,\text{coſ}.2\zeta}{\sqrt{(2\alpha\gamma(1+(\text{coſ}.2\zeta)^2) - (\alpha\alpha+\gamma\gamma)(\text{ſin}.2\zeta)^2)}}.$$

At, cum ſit

$$(\gamma-\alpha).\,\text{ſin}.2\zeta = 2\beta.\,\text{coſ}.2\zeta$$

erit

$$(\alpha\alpha+\gamma\gamma)(\text{ſin}.2\zeta)^2 = 4\beta\beta(\text{coſ}.2\zeta)^2 + 2\alpha\gamma(\text{ſin}.2\zeta)^2$$

ideoque

$$aD.eD = \frac{2aacc.\,\text{coſ}.2\zeta}{\sqrt{(4\alpha\gamma(\text{coſ}.2\zeta)^2 - 4\beta\beta(\text{coſ}.2\zeta)^2)}} = \frac{aacc}{\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)}} = \frac{ac}{\text{coſ}.\phi}.$$

63. Simili modo, cum ſint quadrata

$$aD^2 = \frac{2aacc.\,\text{coſ}.2\zeta}{(\alpha+\gamma).\,\text{coſ}.2\zeta - \alpha + \gamma}$$

&

$$eD^2 = \frac{2aacc.\,\text{coſ}.2\zeta}{(\alpha+\gamma).\,\text{coſ}.2\zeta + \alpha - \gamma},$$

erit

$$aD^2 + eD^2 = \frac{4aacc.(\alpha+\gamma)(\text{coſ}.2\zeta)^2}{4\alpha\gamma(\text{coſ}.2\zeta)^2 - 4\beta\beta(\text{coſ}.2\zeta)^2} = \frac{(\alpha+\gamma)aacc}{\alpha\gamma-\beta\beta}.$$

APPEND.

Hincque elicitur

$$aD + eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha+\gamma+2\sqrt{(\alpha\gamma-\zeta\zeta)})}}{\sqrt{(\alpha\gamma-\zeta\zeta)}}$$

&

$$aD - eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha+\gamma-2\sqrt{(\alpha\gamma-\zeta\zeta)})}}{\sqrt{(\alpha\gamma-\zeta\zeta)}}$$

Semiaxes ergo $aD$ & $eD$ erunt radices hujus æquationis

$$(\alpha\gamma-\zeta\zeta)x^4-(\alpha+\gamma)\,aaccxx+a^4c^4=0,$$

at eſt

$$\sqrt{(\alpha\gamma-\zeta\zeta)}=ac.\,coſ.\,\varphi.$$

64. Cum ſit $aD.\,eD=\frac{ac}{coſ.\,\varphi}$, atque $\varphi$ ſit angulus quem planum ſecans cum plano baſis conſtituit, hinc ſequens elegans Theorema conſequimur.

### Theorema.

« *Si Cylindrus quicunque ſecetur plano quocunque, erit rectangulum Axium ſectionis ad rectangulum Axium Baſis Cylindri, uti ſecans anguli, quem planum ſectionis cum plano Baſis conſtituit, ad ſinum totum.* »

Quare, cum omnia parallelogramma circa Diametros conjugatas deſcripta æqualia ſint rectangulis ex Axibus formatis, etiam parallelogramma iſta circa Baſin & ſectionem quamcunque Cylindri formata eandem inter ſe tenebunt rationem.

TAB. XXXV. Fig. 133. 65. Natura autem hujuſmodi ſectionum obliquarum Cylindri commodius ſequenti modo definiri poterit. Si fuerit Baſis Cylindri Ellipſis $AEBF$, cujus ſemiaxes $AC=BC=a$, $EC=CF=c$, atque recta $CD$ ad Centrum Baſis $C$ perpendicularis Axis Cylindri: ſecetur iſte Cylindrus plano, cujus cum plano Baſis interſectio ſit recta $TH$ ad Axem $AB$ productum utcunque oblique poſita, ad quam ex $C$ perpendiculum demittatur $CH$, ſitque angulus $GCH=\theta$. Tranſeat planum ſecans per Axis Cylindri punctum $D$; erit, ducta $DH$, angulus $CHD$ inclinatio plani ſecantis ad planum Baſis, qui angulus vocetur $=\varphi$. Poſita ergo $CG=f$, erit

$GH = f.\,ſin.\,\theta$; $CH = f.\,coſ.\,\theta$; $DH = \frac{f.\,coſ.\,\theta}{coſ.\,\varphi}$, & $CD = \frac{f.\,coſ.\,\theta.\,ſin.\,\varphi}{coſ.\,\varphi}$. Hinc, ob triangulum $DCG$ ad $C$ rectangulum, erit $DG = \frac{f.\,\sqrt{(1 + ſin.\,\theta^2.\,ſin.\,\varphi^2)}}{coſ.\,\varphi}$, & anguli $DGH$ ſinus $= \frac{coſ.\,\varphi}{\sqrt{(1 + ſin.\,\theta^2.\,ſin.\,\varphi^2)}}$, coſinus $= \frac{ſin.\,\theta.\,coſ.\,\varphi}{\sqrt{(1 + ſin.\,\theta^2.\,ſin.\,\varphi^2)}}$ & tangens $= \frac{coſ.\,\theta}{ſin.\,\theta.\,coſ.\,\varphi}$. CAP. III.

66. Jam, ex ſectionis quæſitæ puncto quovis $M$ in Baſin demittatur perpendicularis $MQ$; ductaque Applicata $QP$, ſit $CP = x$, $PQ = y$, erit $aacc = aayy + ccxx$. Ducatur $QT$ ipſi $CG$ parallela, in eamque ex $G$ normalis $GR$; erit $GR = y$, & $QR = f - x$. Quoniam igitur angulus $TGR = GCH = \theta$, erit $GT = \frac{y}{coſ.\,\theta}$ & $TR = \frac{y.\,ſin.\,\theta}{coſ.\,\theta}$: unde fit $QT = f - x + \frac{y.\,ſin.\,\theta}{coſ.\,\theta}$. Ideoque, ob triangula $CDG$ & $QMT$ ſimilia, erit $CG : DG = QT : TM$, & $CG : CG - QT = DG : DS$, ducta $MS$ parallela $GT$. Hinc erit $DS = \frac{(x.\,coſ.\,\theta - y.\,ſin.\,\theta)\sqrt{(1 + ſin.\,\theta^2.\,ſin.\,\varphi^2)}}{coſ.\,\theta.\,coſ.\,\varphi}$. Poſitis ergo $DS = t$, $MS = u$, erit $x.\,coſ.\,\theta - y.\,ſin.\,\theta = \frac{t.\,coſ.\,\theta.\,coſ.\,\varphi}{\sqrt{(1 + ſin.\,\theta^2.\,ſin.\,\varphi^2)}}$; $y = u.\,coſ.\,\theta$; unde æquatio inter $t$ & $u$ reperietur, quæ adhuc erit ſatis complicata.

67. Quod ſi autem, loco Axium principalium Baſis, ducatur Diameter $EF$ interſectioni $TH$ parallela, ad eamque Diameter conjugata $AB$, quæ producta ipſi $TH$ occurrat in $G$. Tum vero maneant eadem, quæ ante poſuimus $CG = f$; $GCH = \theta$; $CHD = \varphi$, $CA = CB = m$, $CE = CF = n$; fueritque ducta $QP$ Diametro $EF$ parallela, & poſitis $CP = x$, $PQ = y$, ut ſit $m^2n^2 = m^2y^2 + n^2x^2$, erit $GT = MS = y$; & $DS = \frac{DG.\,x}{CG} = \frac{x\sqrt{(1 + ſin.\,\theta^2.\,ſin.\,\varphi^2)}}{coſ.\,\varphi}$. Quare, poſitis $DS = t$



Digitized by Google

APPEND. & $MS = u$, fiet $x = \frac{t.\,coſ.\,\theta}{\sqrt{(1 + ſin.\,\theta^2.\,ſin.\,\varphi^2)}}$ & $y = u$, erit vero $\frac{CG}{DG}$ coſinus anguli $CGD$; unde, ſi ponatur angulus $CGD = n$, erit $x = t.\,coſ.\,n$; ideoque pro ſectione quæſita erit $mmnn = mmuu + nntt.\,coſ.\,n^2$, ad Diametros conjugatas, Centro exiſtente in $D$; eritque ſemidiameter in directione $DS = \frac{m}{coſ.\,n}$ & alter $= n$. Anguli vero, quo hæ Diametri invicem inclinantur $GSM$, tangens erit $= \frac{coſ.\,\theta}{ſin.\,\theta.\,coſ.\,\varphi}$ & coſinus $= \frac{ſin.\,\theta.\,coſ.\,\varphi}{\sqrt{(1 + ſin.\,\theta^2.\,ſin.\,\varphi^2)}} = ſin.\,\theta.\,coſ.\,n$. Hocque pacto natura ſectionis facillime cognoſcitur.

TAB. XXXV. Fig. 134. 68. Expoſitis ergo ſectionibus Cylindri, ad Conum progrediamur, ſive rectum ſive ſcalenum: eo vero tantum Conum ſcalenum a recto differre conſidero, quod in ſcaleno ſectiones ad Axem Coni normales ſint Ellipſes ſua Centra in Axe Coni habentes; dum in recto hæ ſectiones ſunt Circuli. Sit igitur $OaebfO$ Conus quicunque Verticem in $O$ & Axem $Oc$ habens; quem ad planum tabulæ pono normalem, ita ut tabula repræſentet planum per Coni Verticem $O$ ductum & ad Axem Coni $Oc$ normale. Ducantur per $O$ in plano tabulæ rectæ $AB$, $EF$ Axibus $ab$ & $ef$ cujuſque ſectionis Axi normalis parallelæ. Quod ſi ergo ex ſectionis $aebf$ puncto quocunque $M$ ad planum tabulæ demittatur normalis $MQ$, & ex $Q$ ad $AB$ perpendiculum $PQ$; ſi ponantur $OP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, erit quoque ſectionis Abſciſſa $cp = x$, Applicata $pM = y$: unde, cum Axes $ab$, $ef$ ad $Oc = QM = z$, conſtantem teneant rationem, ſi ponatur $ac = bc = mz$ & $ec = fc = nz$, erit $m^2n^2zz = mmyy + nnxx$; quæ eſt æquatio naturam Superficiei Conicæ exprimens, inter tres variabiles $x$, $y$ & $z$.

69. Cum igitur omnes ſectiones Axi $Oc$ normales ſint Ellipſes, uti ex æquatione $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$ (tribuendo

ipſi $z$ valorem conſtantem ) apparet ; ſimili modo facile cognoſcentur ſectiones , quæ vel ad rectam $AB$ vel $EF$ erunt normales. Si enim iſte Conus ſecetur plano ad $AB$ normali & per punctum $P$ tranſeunte , poſito $OP = a$ , iſta pro ſectione habebitur æquatio $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 a^2$ , inter Coordinatas $Pp = z$ , & $pM = y$ ; quam propterea patet eſſe Hyperbolam Centrum in $P$ habentem , cujus ſemiaxis tranſverſus erit $= \frac{a}{m}$ , & ſemiaxis conjugatus $= \frac{na}{m}$. Pari modo , ſi $y$ ponatur conſtans , ſectio rectæ $EF$ normalis intelligetur eſſe Hyperbola Centrum habens in ipſa recta $EF$. Cap. III.

70. Si planum , quo Conus ſecatur , ſit quidem perpendiculare ad planum $AEBF$ , at vero ad neutram Linearum $AB$ , $EF$ normale , facile quoque ſectio Coni definitur. Secet enim hoc planum Baſin $AEBF$ recta $BE$ , ac vocetur $OB = a$ , $OE = b$. Jam , ex puncto ſectionis quovis $M$ demittatur normalis $MQ$ , & ex $Q$ Applicata $QP$ , ut ſit $OP = x$ , $PQ = y$ , & $QM = z$ ; atque , ex natura Coni , $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$. Erit ergo $a : b = a - x : y$ , ſeu $y = b - \frac{bx}{a}$. Ponantur ſectionis Coordinatæ $BQ = t$ , & $QM = z$ : erit $b : \sqrt{(aa + bb)} = y : t$ ; ideoque $y = \frac{bt}{\sqrt{(aa+bb)}}$ , & $a - x = \frac{at}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Sit $\sqrt{(aa + bb)} = c$ ; erit $y = \frac{bt}{c}$ ; $x = a - \frac{at}{c}$ , atque prodibit inter $t$ & $z$ ſequens æquatio Tab. XXXVI. Fig. 135.

$$m^2 n^2 c^2 z^2 = m^2 b^2 tt + n^2 a^2 cc - 2nnaact + nnaatt.$$

Fiat $t - \frac{nnaac}{m^2 b^2 + n^2 a^2} = GQ = u$ , exiſtente $BG = \frac{nnaac}{m^2 b^2 + n^2 a^2}$ , & erit $m^2 n^2 c^2 z^2 = (m^2 b^2 + n^2 a^2)\, uu + \frac{m^2 n^2 a^2 b^2 c^2}{m^2 b^2 + n^2 a^2}$.

71. Erit ergo hæc Coni ſectio Hyperbola Centrum habens

APPEND. in puncto $G$, cujus ſemiaxis tranſverſus erit $Ga = \frac{ab}{\sqrt{(m^2b^2 + n^2a^2)}}$; & ſemiaxis conjugatus $= \frac{mnabc}{m^2b^2 + n^2a^2}$. Aſymtotæ vero hujus Hyperbolæ, quæ Axem $Ga$ in Centro $G$ decuſſabunt, cum Axe $Ga$ facient angulum, cujus tangens eſt $= \frac{mnc}{\sqrt{(m^2b^2 + n^2a^2)}}$. Quo ergo ſectio fiat Hyperbola æquilatera, oportet eſſe $m^2n^2aa + m^2n^2b^2 = m^2b^2 + n^2a^2$, ſeu $\frac{b}{a} = tang.\ OBE = \frac{n\sqrt{(mm-1)}}{m\sqrt{(1-nn)}}$. Niſi ergo ſit $\frac{mm-1}{1-nn}$ major nihilo, Hyperbola æquilatera hoc modo oriri nequit. In Cono recto, quidem ubi eſt $m = n$, anguli, quem Aſymtotæ cum Axe ſectionis conſtituunt, tangens erit $= m$, & angulus $=$ angulo $aOc$.

TAB. XXXV. Fig. 134.

TAB. XXXVI. Fig. 136.

72. Sit nunc ſectio obliqua, ita tamen ut ejus interſectio $BT$ cum plano $AEBF$ ſit normalis ad rectam $AB$. Ponatur $OB = f$, & angulus inclinationis plani ad planum Baſis, ſeu angulus $OBC = \varphi$, ita ut hoc planum ſecans Axem Coni $OC$ in puncto $C$ trajiciat; erit $BC = \frac{f}{cof.\ \varphi}$; & $OC = \frac{f.\ ſin.\ \varphi}{cof.\ \varphi}$. Ex ſectionis quæſitæ puncto quovis $M$ ad $BT$ ducatur perpendicularis $MT$; tum vero ad planum Baſis perpendiculum $MQ$: & ex $Q$ ad $OB$ normalis $QP$: ita ut, poſitis $OP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$, habeatur $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$. Ponantur pro ſectione Coordinatæ $BT = t$, $TM = u$; erit, ob angulum $QTM = \varphi$, $QM = z = u.\ ſin.\ \varphi$; $TQ = u.\ cof.\ \varphi = f - x$; unde fit $y = t$; $z = u.\ ſin.\ \varphi$; & $x = f - u.\ cof.\ \varphi$; ideoque

$$m^2n^2u^2.\ ſin.\ \varphi^2 = m^2t^2 + n^2(f - u.\ cof.\ \varphi)^2.$$

73. Ponatur $BC = \frac{f}{cof.\ \varphi} = g$, ut fiat $f = g.\ cof.\ \varphi$, erit $x = (g - u).\ cof.\ \varphi$; atque pro ſectione erit

Digitized by Google

$m^2 n^2 u^2 . \text{ſin.}\,\varphi^2 = m^2 t^2 + n^2 g^2 . \text{coſ.}\,\varphi^2 - 2 n^2 g u . \text{coſ.}\,\varphi^2 + n^2 u^2 \, \text{coſ.}\,\varphi^2$. CAP. III.
Statuatur $u - \frac{g . \text{coſ.}\,\varphi}{\text{coſ.}\,\varphi^2 - m^2 . \text{ſin.}\,\varphi}, = S G = s$, ducta $M S$ parallela ipſi $B T$, ſumtaque $B G = \frac{g . \text{coſ.}\,\varphi^2}{\text{coſ.}\,\varphi^2 - m^2 \, \text{ſin.}\,\varphi}, = \frac{f . \text{coſ.}\,\varphi}{\text{coſ.}\,\varphi^2 - m^2 \, \text{ſin.}\,\varphi^2} = \frac{f . \text{coſ.}\,\varphi}{1 - (1 + m^2) . \text{ſin.}\,\varphi^2}$; ita ut Coordinatæ ſint $G S = s$ & $S M = t$, atque naſcetur hæc æquatio $m^2 tt + nn (\text{coſ.}\,\varphi^2 - m^2 . \text{ſin.}\,\varphi^2) ss - \frac{mmnnff \, \text{ſin.}\,\varphi^2}{(\text{coſ.}\,\varphi^2 - m^2 . \text{ſin.}\,\varphi^2)} = 0$.
Erit ergo Curva Sectio conica Centrum habens in $G$. Eritque ergo Parabola ſi Centrum $G$ in infinitum abit, quod fit ſi $\text{tang.}\,\varphi = \frac{1}{m}$; ſeu, ſi recta $B C$ fuerit lateri Coni $O a$ parallela. Hoc vero caſu erit $mmtt + nnff - 2 nnfu . \text{coſ.}\,\varphi = 0$: Vertex Parabolæ erit in $G$, ſumta $B G = \frac{f}{2 \, \text{coſ.}\,\varphi}$; & Latus rectum erit $= \frac{2nnff . \text{coſ.}\,\varphi}{mm}$.

TAB. XXXV. Fig. 134.

TAB. XXXVI. Fig. 136.

74. Quoniam ſectio eſt Parabola, ſi fuerit $\text{coſ.}\,\varphi^2 - m^2 . \text{ſin.}\,\varphi^2 = 0$; manifeſtum eſt eam fore Ellipſin, ſi ſit $\text{coſ.}\,\varphi^2$ major quam $m^2 \, \text{ſin.}\,\varphi^2$, ſeu $\text{tang.}\,\varphi$ major quam $\frac{1}{m}$, quo quidem caſu recta $B C$ ſurſum converget cum latere Coni oppoſito $O a$. Cum igitur ſit $B G = \frac{g}{1 - m^2 . \text{tang.}\,\varphi^2}$, erit $B G$ major quam $B C$, exiſtente $G$ ſectionis quæſitæ Centro. Erit ergo ſectionis quæſitæ ſemiaxis in directione $B C$ poſitus $= \frac{m f . \text{ſin.}\,\varphi}{\text{coſ.}\,\varphi^2 - m^2 . \text{ſin.}\,\varphi^2}$, alter vero ſemiaxis conjugatu $= \frac{n f . \text{ſin.}\,\varphi}{\sqrt{(\text{coſ.}\,\varphi^2 - m^2 . \text{ſin.}\,\varphi^2)}}$, & ſemilatus rectum $= \frac{nn}{m} f . \, \text{ſin.}\,\varphi$. Unde ſectio erit Circulus, ſi fuerit $m = n \sqrt{(\text{coſ.}\,\varphi^2 - m^2 . \text{ſin.}\,\varphi^2)}$ ſeu $mm = nn - nn(1 + mm) . \text{ſin.}\,\varphi$; hincque fit $\text{ſin.}\,\varphi = \frac{\sqrt{nn - mm)}}{n \sqrt{(1 + mm)}} = \text{ſin.}\, O B C$, & $\text{coſ.}\,\varphi = \frac{m \sqrt{(1 + nn)}}{n \sqrt{(1 + mm)}}$. Niſi ergo ſit $n$ major quam $m$, nulla hujuſmodi ſectio eſſe poterit Circulus.

Digitized by Google

APPEND. 75. Si fuerit $m^2\,\text{ſin.}\,\varphi^2$ major quam $\text{coſ.}\,\varphi^2$, ſeu $\text{tang.}\,\varphi$ major quam $\frac{1}{m}$; ita ut recta $BC$ cum latere Coni oppoſito $Oa$ ſurſum divergat, ſectio erit Hyperbola, cujus ſemilatus tranſverſum erit $= \frac{m f.\,\text{ſin.}\,\varphi}{-\text{coſ.}\,\varphi^2 + m^2\,\text{ſin.}\,\varphi^2}$, & ſemilatus conjugatum $= \frac{n f.\,\text{ſin.}\,\varphi}{\sqrt{(m^2.\,\text{ſin.}\,\varphi^2 - \text{coſ.}\,\varphi^2)}}$; ac ſemilatus rectum $= \frac{nn}{m} f.\,\text{ſin.}\,\varphi$, & anguli, ſub quo Aſymtotæ Axem in Centro $G$ decuſſant, tangens erit $= \frac{n}{m}\sqrt{(m^2.\,\text{ſin.}\,\varphi^2 - \text{coſ.}\,\varphi^2)}$. Quare Hyperbola erit æquilatera ſi fuerit $m^2 n^2.\,\text{ſin.}\,\varphi^2 - n^2.\,\text{coſ.}\,\varphi^2 = m^2 = (mm+1)\,nn.\,\text{ſin.}\,\varphi^2 - nn = mm$, ſeu $\text{ſin.}\,\varphi = \frac{\sqrt{(mm+nn)}}{n\sqrt{(1+mm)}}$, & $\text{coſ.}\,\varphi = \frac{m\sqrt{(nn-1)}}{n\sqrt{(1+mm)}}$. Ad hoc ergo neceſſe eſt ut ſit $n$ major unitate, alioquin Hyperbola æquilatera per ſectionem hujuſmodi produci nequit.

76. Si Conus eſt rectus, ſeu $m = n$, tum omnes ſectiones, ad has, quas evolvimus referri poſſunt, quia poſitio rectæ $AB$ ab arbitrio noſtro pendet. At pro Cono ſcaleno ſupereſt, ut inveſtigemus ſectiones quæ a plano utcunque oblique ad rectam $AB$ poſito formantur. Sit igitur $BR$ interſectio plani ſecantis cum plano Baſis $AEBF$. Ponatur $OB = f$, angulus $OBR = \theta$, & angulus inclinationis ſecantis ad Baſin $= \varphi$; erit, demiſſo ex $O$ in $BR$ perpendiculo $OR$, $OR = f.\,\text{ſin.}\,\theta$ & $BR = f.\,\text{coſ.}\,\theta$. Tum, ducta in plano ſecante recta $RC$, erit, ob angulum $ORC = \varphi$, $RC = \frac{f.\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{coſ.}\,\varphi}$ & $OC = \frac{f.\,\text{ſin.}\,\theta.\,\text{ſin.}\,\varphi}{\text{coſ.}\,\varphi}$. Si jam ſectio ad Axem Coni $OC$ normalis in planum *B*aſis projiciatur, erunt ejus Axes principales ſecundum rectas $AB$ & $EF$ diſpoſiti, alterque erit ut $m$ alter ut $n$.

TAB. XXXVI. *Fig.* 137.

77. In hac ſectione projecta ducatur Diameter $ef$ parallela ipſi $BR$: erit angulus $BOe = \theta$; ſitque $aOb$ poſitio Diametri

Digitized by Google

metri ejus conjugatæ. Ponatur ſemidiameter $Oa = \mu$, 
$Oe = \nu$, erit

$$\mu = \frac{\sqrt{(m^4.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^4.\text{coſ.}\,\theta^2)}}{\sqrt{(m^2.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^2.\text{coſ.}\,\theta^2)}}$$

&

$$\nu = \frac{mn}{\sqrt{(m^2.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^2.\text{coſ.}\,\theta^2)}},$$

atque

$$\text{tang.}\, BOb = \frac{mn.\,\text{coſ.}\,\theta}{mm.\,\text{ſin.}\,\theta},$$

cujus anguli propterea erit

$$\text{Sinus} = \frac{nn.\,\text{coſ.}\,\theta}{\sqrt{(m^4.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^4.\text{coſ.}\,\theta^2)}}$$

&

$$\text{Coſinus} = \frac{mm.\,\text{ſin.}\,\theta}{\sqrt{(m^4.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^4.\text{coſ.}\,\theta^2)}}.$$

Jam eſt angulus $ObR = \theta + BOb$: ergo

$$\text{ſin.}\, ObR = \frac{m^2.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^2.\text{coſ.}\,\theta^2}{\sqrt{(m^4.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^4.\text{coſ.}\,\theta^2)}},$$

&

$$\text{coſ.}\, ObR = \frac{(mm - nn).\,\text{ſin.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\theta}{\sqrt{(m^4.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^4.\text{coſ.}\,\theta^2)}}.$$

At eſt

$$\mu\nu = \frac{mn.\sqrt{(m^4.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^4.\text{coſ.}\,\theta^2)}}{mm.\,\text{ſin.}\,\theta^2 + nn.\,\text{coſ.}\,\theta^2}.$$

78. Cum igitur ſit $OR = f.\,\text{ſin.}\,\theta$, erit

$$Ob = \frac{OR}{\text{ſin.}\, ObR} = \frac{f.\,\text{ſin.}\,\theta\,\sqrt{(m^4.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^4.\text{coſ.}\,\theta^2)}}{m^2.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^2.\text{coſ.}\,\theta^2}$$

&

$$Rb = \frac{(mm - nn)\,f.\,\text{ſin.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\theta}{m^2.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^2.\text{coſ.}\,\theta^2}.$$

Hinc, ex triangulo $RbC$ ad $R$ rectangulo, erit anguli $CbR$ tangens $= \frac{m^2.\text{ſin.}\,\theta^2 + n^2.\text{coſ.}\,\theta^2}{(m^2 - n^2).\text{ſin.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\varphi}$: unde, angulus $CbR$ erit cognitus. Jam, ex puncto ſectionis quovis $M$ ad rectam $RT$ ducatur $MT$ parallela ipſi $Cb$, atque ex $M$ ad $Cb$

APPEND. parallela $MS$ ipſi $RT$: vocenturque $bT = MS = t$; $bS = TM = u$; quæ, tanquam Coordinatæ obliquangulæ ſectionis quæſitæ ſpectentur, exiſtente anguli $bSM$ tangente $= \frac{m^2.\,ſin.\,\theta^2 + n^2.\,coſ.\,\theta^2}{(m^2. - n^2.\,ſin.\,\theta.\,coſ.\,\theta.\,coſ.\,\varphi}$. Patet ergo has Coordinatas fieri orthogonales in Cono recto, propterea quia fit $m = n$.

79. Ex puncto ſectionis $M$ ad planum $AEBF$ demittatur perpendiculum $MQ$; junctaque $TQ$ erit parallela Diametro $ab$; tum ex $Q$ ducatur ordinata $QP$ alteri Diametro $ef$ parallela. Atque, vocatis $OP = x$; $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Coni

$$\mu^2 \nu^2 z^2 = \mu^2 y^2 + \nu^2 x^2.$$

Namque, ſi per punctum $M$ concipiatur Coni ſectio Baſi parallela, erunt ejus ſemidiametri rectis $ab$ & $ef$ parallelæ $\mu z$ & $\nu z$. At, cum inventa ſint Trianguli rectanguli $COb$ latera $OC$ & $Ob$, erit Hypothenuſa

$$Cb = \frac{f.\,ſin.\,\theta \sqrt{(m^4.\,ſin.\,\theta^2 + n^4.\,coſ.\,\theta^2 - (m^2 - n^2)^2.\,ſin.\,\theta^2.\,coſ.\,\theta^2.\,ſin.\,\varphi^2)}}{(m^2.\,ſin.\,\theta^2 + n^2.\,coſ.\,\theta^2).\,coſ.\,\varphi}$$

& ob Triangula $TMQ$, $bCO$ ſimilia, erit

$$TM(u) : TQ(Ob - x) : QM(z) = bC : Ob : OC$$

ergo $x = Ob - \frac{Ob.\,u}{Cb}$; $z = \frac{OC.\,u}{Cb}$; & $y = t$; ideoque

$$\mu^2 \nu^2.\,OC^2.\,u^2 = \mu^2.\,Cb^2.\,t^2 + \nu^2.\,Ob^2\,(Cb - u)^2.$$

80. Æquatio hæc evoluta dabit hanc

$$0 = \mu^2.\,Cb^2.\,tt + \nu^2\,(Ob^2 - \mu^2.\,Oc^2)\,uu - 2\nu^2.\,Ob^2.\,Cb.\,u + \nu^2.\,Ob^2.\,Cb^2,$$

in qua ſi ponatur $u - \frac{Ob^2.\,Cb}{Ob^2 - \mu^2.\,Oc^2} = s$: ſeu, ſumta $bG = \frac{Ob^2.\,Cb}{Ob^2 - \mu^2.\,Oc^2} = \frac{Cb}{1 - (m^2.\,ſin.\,\theta^2 + n^2.\,coſ.\,\theta^2)\,tang.\,\varphi^2}$, & vocata

$GS = s$; erit $G$ Centrum ſectionis conicæ cujus æquatio CAP. III.
inter Coordinatas $t$ & $s$ erit

$$\mu^2 . Cb^2 . tt + \nu^2 ( Ob^2 - \mu^2 . Oc^2 ) ss = \frac{\mu^2 . \nu^2 . Ob^2 . Oc^2 . Cb^2}{Ob^2 - \mu^2 . Oc^2},$$

cujus ſemidiameter tranſverſus erit $= \frac{\mu . Ob . Oc . Cb}{Ob^2 - \mu^2 . Oc^2}$, & ſemidiameter conjugatus $= \frac{\nu . Ob . Oc}{\sqrt{( Ob^2 - \mu^2 . Oc^2 )}}$, & ſemilatus rectum $= \frac{\nu\nu . Ob . Oc}{\mu . Cb}$. Ceterum apparet ſi ſit *tang.* $\varphi$ minor quam $\frac{1}{\sqrt{( m^2 . \mathit{ſin.}\, \theta^2 + n^2 . \mathit{coſ.}\, \theta^2 )}}$, ſeu *tang.* $\varphi$ minor quam $\frac{\nu}{mn}$, Curvam fore Ellipſin; ſi ſit *tang.* $\varphi = \frac{\nu}{mn}$, Parabolam; & ſi *tang.* $\varphi$ major quam $\frac{\nu}{mn}$, Hyperbolam.

81. Tertium corpus, cujus ſectiones plano factas hic inveſtigare conſtituimus, eſt Globus, cujus quidem omnes ſectiones planas Circulos eſſe ex Geometria elementari conſtat. Interim tamen quo methodus clarius perſpiciatur, quemadmodum ex data æquatione pro Solido quocunque ejus ſectiones quævis erui debeant, idem negotium hic analytice abſolvam quod vulgo ſynthetice tradi ſolet. Sit igitur $C$ Centrum Globi, per quod planum tabulæ tranſire concipiatur, ita ut ſectio hoc plano facta ſit Circulus maximus, cujus radius $CA = CB$, ponatur $= a$, qui ſimul erit radius Globi. Sit porro recta $DT$ interſectio plani ſecantis cum iſto plano tabulæ, ad quam ex $C$ ducatur normalis $CD$, quæ ſit $= f$, angulus autem inclinationis ſit $= \varphi$. TAB. XXXVII. Fig. 138.

82. Sit $M$ punctum ſectionis quæſitæ quodcunque; unde ad planum tabulæ demittatur perpendiculum $MQ$, hincque ad rectam $CD$ pro Axe aſſumtam perpendicularis $QP$. Quod ſi jam vocentur Coordinatæ $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Globi, $xx + yy + zz = aa$. Ducatur ex $M$ pariter ad rectam $DT$ normalis $MT$; & juncta $QT$, ob ambas $QT$ & $MT$ ad $DT$ normales, metietur angulus $MTQ$



Digitized by Google

APPEND. inclinationem plani ſecantis ad planum Baſis, quæ eſt $= \varphi$. Quare ſi $DT$ & $MT$ tanquam Coordinatæ ſectionis quæſitæ ſpectentur, vocenturque $DT = t$, $TM = u$, fiet $MQ = u.\,ſin.\,\varphi$; & $TQ = u.\,coſ.\,\varphi$. Erit ergo $CP = x = f - u.\,coſ.\,\varphi$; $PQ = y = t$; & $QM = z = u.\,ſin.\,\varphi$. Quibus valoribus ſubſtitutis emerget æquatio pro ſectione Globi quæſita hæc

$$ff - 2fu.\,coſ.\,\varphi + uu + tt = aa.$$

83. Perſpicuum jam eſt hanc æquationem eſſe pro Circulo. Namque ſi ponatur $u - f.\,coſ.\,\varphi = s$, fiet

$$ff.\,ſin.\,\varphi^2 + ss + tt = aa,$$

unde radius ſectionis erit $= \sqrt{(aa - ff.\,ſin.\,\varphi^2}$. Quare, ſi ex $D$ Applicatæ $TM$ parallela ducatur $Dc$, in eamque ex Centro $C$ perpendiculum demittatur $Cc$, ob $CD = f$ & angulum $CDc = \varphi$, erit $Dc = f.\,coſ.\,\varphi$ & $Cc = f.\,ſin.\,\varphi$. Hinc, cum Coordinatæ $s$ & $t$ ad Centrum referantur, erit punctum $c$ Centrum ſectionis, & $\sqrt{(CB^2 - Cc^2)}$ radius iſtius Circuli, uti ex Elementis eſt manifeſtum. Simili autem modo omnium aliorum Solidorum, dummodo eorum natura ſit æquatione inter tres variabiles expreſſa, ſectiones quæcunque planis factæ inveſtigari poterunt.

TAB. XXXVII. Fig. 139. 84. Quo tamen tota operatio melius perſpiciatur, proponatur Solidum quodcunque, cujus natura ſit expreſſa æquatione inter ternas Coordinatas $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; quarum illæ poſitæ ſint in plano tabulæ hæc vero $z$ ſit ad planum normalis. Secetur jam hoc Solidum plano quocunque, cujus cum plano tabulæ interſectio ſit recta $DT$, & inclinationis angulus $= \varphi$. Ponatur recta $AD = f$, angulus $ADE = \theta$; eritque, demiſſo ex $A$ in $DE$ perpendiculo $AE$, $AE = f.\,ſin.\,\theta$ & $DE = f.\,coſ.\,\theta$. Tum, ex ſectionis quæſitæ puncto $M$ ad $DT$ ducatur perpendicularis $MT$; junctaque $QT$, æquabitur angulus $MTQ$ inclinationi datæ $\varphi$. Quare,

ſi $DT$ & $TM$ pro Coordinatis ſectionis quæſitæ accipiantur, & vocentur $DT = t$, $TM = u$, erit $QM = u.\,ſin.\,\varphi$, & $TQ = u.\,coſ.\,\varphi$. CAP. III.

85. Ex $T$ ad Axem $AD$ demittatur perpendiculum $TV$; atque, ob angulum $TDV = \theta$, erit $TV = t.\,ſin.\,\theta$ & $DV = t.\,coſ.\,\theta$. Quia porro angulus $TQP$ eſt $= \theta$, erit $PV = u.\,ſin.\,\theta.\,coſ.\,\varphi$ & $PQ - TV = u.\,coſ.\,\theta.\,coſ.\,\varphi$. Ex his itaque Coordinatæ $x$, $y$, & $z$ ſequenti modo per $t$ & $u$ definientur ut ſit

$$AP = x = f + t.\,coſ.\,\theta - u.\,ſin.\,\theta.\,coſ.\,\varphi$$

&

$$PQ = y = t.\,ſin.\,\theta + u.\,coſ.\,\theta.\,coſ.\,\varphi$$

atque

$$QM = z = u.\,ſin.\,\varphi.$$

Quare, ſi iſti valores in æquatione inter $x$, $y$, & $z$ pro Solido data ſubſtituantur, obtinebitur æquatio inter $t$ & $u$, ſeu Coordinatas ſectionis quæſitæ, cujus adeo natura innoteſcet. Convenit autem hic modus fere cum eo, quo ſupra §. 50. uſi ſumus.

## CAPUT IV.

### *De immutatione Coordinatarum.*

86. QUEMADMODUM æquationes pro Lineis curvis in eodem plano ſitis in innumerabiles formas diverſas transformari poſſunt, immutandis cum Abſciſſarum initio, tum Axis poſitione, tum utroque: ita in præſenti negotio multo adhuc major varietas locum habet. Primum enim in eodem plano, in quo binæ Coordinatæ ſunt ſitæ, hæ infinitis modis variari poſſunt. Deinde vero hoc ipſum planum, quod duas

Digitized by Google

APPEND. continet Coordinatas mutari, ſicque prior varietas in infinitum augeri poterit. Data ſcilicet æquatione inter tres Coordinatas inter ſe normales, perpetuo inveniri poteſt alia æquatio inter tres quaſcunque alias Coordinatas pariter inter ſe normales, quarum poſitio reſpectu priorum infinities magis variari poteſt, quam ſi duæ tantum eſſent Coordinatæ, uti uſu venit in æquationibus Linearum curvarum.

87. Ponamus primum ſolum Abſciſſarum $x$ initium in Axe mutari, ita ut binæ reliquæ Coordinatæ $y$ & $z$ maneant eædem; atque nova Abſciſſa quantitate conſtante ab $x$ diſcrepabit. Sit igitur nova Abſciſſa $= t$, erit $x = t + a$ quo valore in æquatione pro Superficie ſubſtituto prodibit æquatio inter tres Coordinatas $t$, $y$ & $z$ quæ, etſi a priori diverſa, tamen pro eadem erit Superficie. Simili modo reliquæ Coordinatæ $y$ & $z$ quantitatibus conſtantibus augeri minuive poterunt: atque, ſi ponatur $x = t + a$; $y = u \pm b$ & $z = v + c$, orietur æquatio inter tres variabiles $t$, $u$, & $v$ pro eadem Superficie: atque adeo hæ novæ Coordinatæ prioribus erunt parallelæ. Interim hoc modo æquatio pro Superficie, etſi eſt magis generalis, tamen non multum variatur.

TAB. XXXVII. Fig. 140. 88. Quoniam tres Coordinatæ orthogonales, quarum æquatio naturam Superficiei exprimit, ad tria plana inter ſe normalia referuntur, ponamus planum unum in quo binæ Coordinatarum $x$ & $y$ capiuntur, invariatum manere, in eo autem Lineam quamcunque aliam $CT$, præter $AP$, pro Axe aſſumi. Cum igitur priores Coordinatæ pro Axe $AP$ eſſent $AP = x$, $P = y$, $QM = z$, pro novo Axe $CQ$ manebit Coordinata $QM = z$ eadem, at binæ reliquæ evadent $CT = t$, $TQ = u$, ducta $QT$ ad novum Axem $CT$ normali. Ad æquationem igitur inter has novas Coordinatas $t$, $u$ & $z$ inveniendam, ducatur $CR$ parallela priori Axi $AP$, tum ex $C$ ad eum perpendicularis ducatur $CB$, ac vocetur $AB = a$, $BC = b$; & angulus $RCT = \zeta$. Denique ducatur $TR$ normalis ad $CR$ & ex $T$ in $QP$ productam perpendiculum $TS$.

89. His factis; in Triangulo $TCR$ erit $TR = t.\,ſin.\,\zeta$, $CR = t.\,coſ.\,\zeta$: in Triangulo autem $QTS$, cujus angulus ad $Q$ pariter erit $= \zeta$, fiet $TS = u.\,ſin.\,\zeta$, & $QS = u.\,coſ.\,\zeta$. Ex his jam obtinebitur $AP = x = CR + TS - AB = t.\,coſ.\,\zeta + u.\,ſin.\,\zeta - a$; & $QP = QS - TR - BC = y = u.\,coſ.\,\zeta - t.\,ſin.\,\zeta - b$. Quod ſi ergo iſti valores loco $x$ & $y$ in æquatione pro Superficie propoſita ſubſtituantur, reſultabit æquatio inter ternas novas Coordinatas $t$, $u$ & $z$, qua ejuſdem Superficiei natura exprimetur. Hæc igitur nova æquatio multo latius patentem ſpeciem præ ſe feret, cum in eam ingrediantur tres novæ conſtantes arbitrariæ $a$, $b$ & angulus $\zeta$, quæ in priori æquatione non inerant. Hæcque erit æquatio generalis: quando quidem idem planum, in quo binæ Coordinatæ $x$ & $y$ verſantur, retineatur.

90. Varietur nunc quoque planum, in quo binæ priores Coordinatæ $x$ & $y$ erant aſſumtæ: ac primo quidem ita ut interſectio novi plani cum priori $APQ$ incidat in ipſam rectam $AP$, quæ etiam pro novis Coordinatis tanquam Axis ſpectetur. Sit igitur $APT$ hoc novum planum, cujus ad prius $APQ$ inclinatio erit angulus $QPT$, qui ponatur $\eta$. Ex $M$ in $PT$ ducatur normalis $MT$, quæ ſimul in novum planum erit perpendicularis & vicem tertiæ Coordinatæ tenebit. Ponantur ergo tres novæ Coordinatæ $AP = x$, $PT = u$, & $TM = v$: &, ducta $TR$ ad $PQ$, & $TS$ ad $QM$ normali, erit $TR = u.\,ſin.\,\eta$, $PR = u.\,coſ.\,\eta$; $TS = v.\,ſin.\,\eta$ & $MS = v.\,coſ.\,\eta$. Hinc erit $PQ = y = u.\,coſ.\,\eta - v.\,ſin.\,\eta$ & $QM = z = v.\,coſ.\,\eta + u.\,ſin.\,\eta$, qui valores, in æquatione propoſita pro $y$ & $z$ ſubſtituti, dabunt æquationem inter tres novas Coordinatas $x$, $u$ & $v$, qua ejuſdem Superficiei natura exprimetur. TAB. XXXVII. Fig. 141.

91. Cadat nunc interſectio novi plani ſecantis cum plano $APQ$ in Lineam quamcunque $CT$, ſitque $\eta$ inclinatio iſtorum planorum; ac ſumatur recta hæc $CT$ pro Axe in hoc plano. Quæratur primum æquatio inter Coordinatas in plano $APQ$ ad Axem $CT$ relatas, quæ ex præcedentibus ita re- TAB. XXXVII. Fig. 140.

APPEND. perietur, ut, poſitis $AB=a$, $BC=b$, angulo $TCR=\zeta$, & Coordinatis $CT=p$, $TQ=q$, & $QM=r$, ut ſit $x=p.\,coſ\,\zeta+q.\,ſin.\,\zeta-a$; $y=q.\,coſ.\,\zeta-p.\,ſin.\,\zeta-b$, & $z=r$. Nunc vero ex §. præcedente, poſitis novis Coordinatis $t$, $u$, & $v$, fiet $p=t$; $q=u.\,coſ.\,\eta-v.\,ſin.\,\eta$, & $r=v.\,coſ.\,\eta+u.\,ſin.\,\eta$. His ſubſtitutis, Coordinatæ principales $x$, $y$, $z$ ex novis ita determinabuntur ut ſit

$$x=\quad t.\,coſ.\zeta+u.\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\eta-v.\,ſin.\,\zeta.\,ſin.\,\eta-a$$

&

$$y=-\,t.\,ſin.\zeta+u.\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\eta-v.\,coſ.\,\zeta.\,ſin.\,\eta-b$$

atque

$$z=\quad u.\,ſin.\,\eta+v.\,coſ.\,\eta.$$

TAB. XXXVII. Fig. 140. 92. Sumatur jam in plano iſto novo, in quo Coordinatæ $t$ & $u$ ſunt ſitæ, alia Linea quæcunque pro Axe; ſicque orietur æquatio generaliſſima pro Superficie propoſita. Sint in hunc finem $AP$, $PQ$, $QM$ Coordinatæ $t$, $u$, & $v$, quas modo invenimus; ita ut $AP$ repræſentet interſectionem memorati plani cum plano in quo principales Coordinatæ $x$ & $y$ poſitæ concipiuntur. Sitque recta $CT$ novus Axis ad quem novæ generaliſſimæ Coordinatæ, quas quærimus, referantur, quæ vocentur, $CT=p$, $TQ=q$, & $QM=r$. Præterea, ſunt $AB$ & $BC$ Lineæ conſtantes, angulus autem $CTR$ ponatur $=\theta$. His poſitis erit ex §. 89.

$$t=\quad p.\,coſ.\,\theta+q.\,ſin.\,\theta-AB$$

&

$$u=-\,p.\,ſin.\,\theta+q.\,coſ.\,\theta-BC$$

atque

$$v=r.$$

Qui valores ſi ſubſtituantur in expreſſionibus §. præcedentis reperietur

$$x = p(\text{coſ}.\zeta.\text{coſ}.\theta - \text{ſin}.\zeta.\text{coſ}.\eta.\text{ſin}.\theta) + q(\text{coſ}.\zeta.\text{ſin}.\theta + \text{ſin}.\zeta.\text{coſ}.\eta.\text{coſ}.\theta) - r.\text{ſin}.\zeta\,\text{ſin}.\eta + f$$ Cap. IV.

&

$$y = -p(\text{ſin}.\zeta.\text{coſ}.\theta + \text{coſ}.\zeta.\text{coſ}.\eta.\text{ſin}.\theta) - q.(\text{ſin}.\zeta.\text{ſin}.\theta - \text{coſ}.\zeta.\text{coſ}.\eta.\text{coſ}.\theta) - r.\text{coſ}.\zeta.\text{ſin}.\eta + g$$

atque

$$z = -p.\text{ſin}.\eta.\text{ſin}.\theta + q.\text{ſin}.\eta.\text{coſ}.\theta + r.\text{coſ}.\eta + h,$$

ubi $f$, $g$ & $h$ ſunt Lineæ conſtantes ex compoſitione earum, quæ in calculum ſunt introductæ, ortæ.

93. Patet ergo æquationem generaliſſimam pro quavis Superficie ſex conſtantes arbitrarias complecti, quæ utcunque determinentur, æquatio perpetuo ejuſdem Superficiei naturam exprimet. Quantumvis autem ſimplex & ſuccincta fuerit æquatio pro Superficie inter Coordinatas $x$, $y$, $z$, ſi ex ea conflectur æquatio generaliſſima inter $p$, $q$, & $r$, ea ob ingentem conſtantium arbitrariarum numerum neceſſario fiet maxime intricata: præſertim, ſi altiores dimenſiones ipſarum $x$, $y$, & $z$ affuerint. Vix igitur dari poterit caſus, in quo conveniret ad æquationem generaliſſimam aſſurgere. Quanquam enim ea utilitas inde percipi poſſet, ut idoneo modo conſtantibus illis definiendis æquatio ſimpliciſſima redderetur; tamen, ob calculi prolixitatem, hic labor plerumque fieret moleſtiſſimus. Interim tamen in ſequentibus iſta methodus æquationes generaliſſimas formandi uſu non carebit, quoniam inde egregiæ proprietates elicientur ac demonſtrabuntur.

94. Quanquam autem æquatio generaliſſima plerumque ſit maxime complicata; tamen, ſi ad dimenſiones, quas Coordinatæ junctim ſumtæ conſtituunt, ſpectemus, earum numerus perpetuo æqualis eſt numero dimenſionum, quas primæ Coordinatæ $x$, $y$ & $z$ confecerunt. Sic, cum æquatio pro Sphæra $xx + yy + zz = aa$ ſit duarum dimenſionum, æquatio quoque generaliſſima non plures quoque quam duas continebit dimenſiones Coordinatarum $p$, $q$, & $r$. Hinc numerus dimenſionum, quas Coordinatæ in æquatione cujuſpiam Superficiei

 conſtituunt, nobis ſuppeditat eſſentialem characterem naturæ iſtius Superficiei; propterea quod, utcunque poſitio Coordinatarum varietur, perpetuo tamen idem dimenſionum numerus emergit. Similis ſcilicet hic ratio circa Superficies obſervatur, quam ſupra in Lineis curvis deprehendimus; unde eas in certos ordines diviſimus. Eodem ergo modo conveniet Superficies ſecundum dimenſiones Coordinatarum in ordines diſponere: eritque nobis Superficies ordinis primi, cujus æquatio unicam tantum dimenſionem complectitur: ad ordinem ſecundum Superficiem referemus, in cujus æquatione Coordinatæ ad duas dimenſiones aſſurgunt; atque ita porro ex dimenſionum numero ſequentes ordines conſtituentur.

95. Si jam cum his conferantur ea, quæ ſupra de inventione ſectionum planarum cujuſque Superficiei tradita ſunt, ordinem ſectionum perpetuo cum ordine ad quem Superficies pertinet, congruere deprehendemus. Sit enim æquatio pro Superficie quacunque propoſita inter Coordinatas $x$, $y$, & $z$, ad ordinem $n$ pertinens, ſectionis autem ejus cujuſvis Coordinatæ normales ſint $t$ & $u$. Atque ſupra, §. 85, vidimus æquationem inter $t$ & $u$ inveniri, ſi in æquatione pro Superficie ſequentes valores ſubſtituantur

$$x = f + t.\,coſ.\,\theta - u.\,ſin.\,\theta.\,coſ.\,\varphi$$
&
$$y = t.\,ſin.\,\theta + u.\,coſ.\,\theta.\,coſ.\,\varphi$$
atque
$$z = u.\,ſin.\,\varphi.$$

Manifeſtum igitur eſt æquationem pro ſectione plures dimenſiones aſſequi non poſſe, quam habebat æquatio inter $x$, $y$, & $z$; ſed perpetuo totidem prodituras eſſe dimenſiones.

96. Superficies ergo primi ordinis alias ſectiones a plano factas habere nequit præter Lineas primi ordinis, ſeu rectas. Deinde, ex ſectione Superficiei ſecundi ordinis aliæ Lineæ non oriuntur niſi ſecundi ordinis, ſeu Sectiones conicæ; eſt

enim Superficies conica quoque ſecundi ordinis, cum ejus æquatio ſit CAP. IV.

$$zz = \alpha xx + \beta yy.$$

Simili modo, ex Superficie tertii ordinis per ſectiones planas prodibunt Lineæ tertii ordinis, atque ita porro. Fieri tamen quandoque poteſt, ut æquatio pro ſectione quapiam diviſores admittat; quo caſu ſectio erit compoſita ex duabus pluribuſve Lineis inferiorum ordinum. Sic, ſectio Coni per Verticem facta conſtabit ex duabus Lineis rectis, quæ tamen conjunctim Lineam ſecundi ordinis mentiuntur, uti ſupra annotavimus.

97. Conſtitutis igitur Superficierum ordinibus, inveſtigemus præ reliquis eas Superficies, quæ ad ordinem primum pertinent. Æquatio ergo earum naturam exprimens erit $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$, cujus cum omnes ſectiones plano factæ ſint Lineæ rectæ, perſpicuum eſt has Superficies non planas eſſe non poſſe: ſi enim haberent convexitatem vel concavitatem, neceſſario daretur ſectio curvilinea. Quanquam enim in reliquis ordinibus dantur ejuſmodi Superficies, quarum certæ quædam ſectiones ſunt Lineæ rectæ, (uti in Cylindro, Cono, aliiſque, uſu venire vidimus,) tamen in iis ſectiones curvilineæ non excluduntur. Similis ſcilicet hic occurrit ratio, qualem in Lineis obſervavimus: quemadmodum enim Linea, quæ a Linea recta in pluribus uno punctis nullo modo ſecari poteſt, eſt neceſſario recta; ita Superficies quæ a plano ſecta ſemper dat Lineam rectam, neceſſario ipſa plana eſſe colligitur.

98. Ex æquatione autem generaliſſima iſta indoles clariſſime poteſt demonſtrari Formetur enim ex æquatione $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ æquatio generaliſſima inter Coordinatas $p$, $q$, & $r$, ſecundum §. 92. Et, quoniam ſex novæ conſtantes arbitrariæ inducuntur, nil obſtat, quo minus eæ ita determinentur, ut binarum Coordinatarum $p$, & $q$ coëfficientes evaneſcant, atque hujuſmodi æquatio $r = f$ remaneat, ejuſdem Superficiei naturam exprimens. Hæc autem æquatio $r = f$ oſtendet Superficiem propoſitam eſſe plano, in quo binæ Coordinatæ $p$ & $q$



Digitized by Google

APPEND. exiſtunt, parallelam; ideoque ipſam planam: Effici quoque poteſt, ut fiat $r = 0$; ſicque evidens erit, ipſum planum, in quo $p$ & $q$ aſſumuntur, eſſe Superficiem quæſitam.

TAB. XXXVIII Fig. 142. 99. Cum igitur conſtet Superficiem æquatione $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ expreſſam eſſe planam, opus eſt ut ejus poſitionem reſpectu plani, in quo Coordinatæ $x$ & $y$ aſſumuntur, definiamus. Sit igitur $M$ punctum quodcunque hujus Superficiei; atque tres Coordinatæ $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$. Ponatur primum $z = 0$, atque orietur æquatio $\alpha x + \beta y = a$, quæ exprimet interſectionem Superficiei quæſitæ cum plano $APQ$, quam patet eſſe Lineam rectam $BCR$, cujus poſitio reſpectu Axis $AP$ talis erit, ut ſit recta $AB$ ad Axem $AP$ in plano $APQ$ normalis $= \frac{a}{\beta}$, & $AC = \frac{a}{\alpha}$: unde anguli $ACB$ tangens erit $= \frac{\alpha}{\beta}$: ideoque ſinus $= \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$, & coſinus $= \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$. Tum, producatur $QP$ uſque ad occurſum rectæ $BC$ in $R$: atque, ob $CP = x - \frac{a}{\alpha}$, erit $CR = \frac{x\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\beta} - \frac{a\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\alpha\beta}$; & $PR = \frac{\alpha x}{\beta} - \frac{a}{\beta}$.

100. Demittatur ex $Q$ ad $BC$ normalis $QS$: junctaque $MS$, patebit angulum $MSQ$ metiri inclinationem Superficiei propoſitæ ad planum $APQ$. Cum igitur ſit $PR = \frac{\alpha x - a}{\beta}$, erit $QR = \frac{\alpha x + \beta y - a}{\beta} = \frac{-\gamma z}{\beta}$: &, ob angulum $RQS = ACB$, erit $QS = \frac{-\gamma z}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$: unde fit anguli $QSM$ tangens $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\gamma}$; & propterea coſinus $= \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}}$. Superficies ergo quæſita ad planum, in quo verſantur $x$ & $y$, inclinatur angulo, cujus tangens eſt $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\gamma}$:

pari vero modo eadem Superficies ad planum Coordinatarum $x$ & $z$ inclinabitur angulo cujus tangens eſt $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)}}{\beta}$, atque ad planum Coordinatarum $y$ & $z$ angulo cujus tangens eſt $= \frac{-\sqrt{(\beta^2+\gamma)}}{\alpha}$.



---

## CAPUT V.

### *De Superficiebus ſecundi Ordinis.*

101. CONSTITUTIS ergo Superficierum ordinibus ſecundum numerum dimenſionum, quas ſummæ trium Coordinatarum $x$, $y$, $z$ poteſtates in æquatione junctim ſumtæ adimplent; ſi proponatur pro Superficie æquatio algebraïca, ſtatim aſſignari poteſt ordo, ad quem illa Superficies referri debet. Cum igitur omnis Superficies primi ordinis oſtenſa ſit eſſe plana, in hoc Capite Superficies ſecundi ordinis examini ſubjiciam. In iis autem major ſtatim deprehenditur diverſitas, quam in Lineis ſecundi gradus, quod quidem cuique attendenti facile patebit. Operam igitur dabo ut hæc diverſa genera diſtincte exponam. In ordinibus vero altioribus tantopere multitudo generum increſcit, ut ab iis evolvendis prorſus abſtinere debeamus.

102. Quoniam natura Superficierum ſecundi ordinis exprimitur æquatione, in qua variabiles $x$, $y$ & $z$ ad duas dimenſiones aſſurgunt, Cylindrus & Conus, tam rectus quam ſcalenus, & Globus, quorum proprietates jam decripſimus, in hoc ſecundo ordine continentur. Omnes vero Superficies ad hunc ordinem pertinentes comprehenduntur in hac æquatione generali

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0.$$

Utcunque enim tres Coordinatæ accipiantur, æquatio ſemper

APPEND. in hac forma continebitur. Varia ergo Superficierum huc pertinentium genera a diverſa coëfficientium relatione mutua pendebunt, qui, etſi eadem Superficies infinitis æquationibus exprimatur, tamen infinitam variarum Superficierum multitudinem ſuppeditabunt.

103. Quemadmodum in Lineis curvis planis præcipuam diviſionem inde deſumſimus, quod vel in infinitum extendantur, vel in ſpatio finito includantur; ita ſimili modo omnes Superficies ad quemcunque ordinem pertinentes in duas claſſes dividentur; ad quarum alteram referemus eas, quæ in infinitum abeunt, ad alteram vero, quæ in ſpatio finito continentur. Ita Cylindrus & Conus priori claſſi; Globus vero poſteriori annumerabitur. Poſterioris quidem claſſis nulla dabitur Superficies in ordinibus imparibus: cum enim quælibet Superficies imparis ordinis habeat ſectiones planas ejuſdem ordinis, curvæ autem imparium ordinum omnes in infinitum extendantur, neceſſe eſt, ut etiam ipſæ Superficies iſtorum ordinum in infinitum porrigantur.

104. Quoties autem quæpiam Superficies in infinitum extenditur, neceſſe eſt ut, ad minimum, una trium variabilium $x$, $y$ & $z$, in infinitum abeat. Quare, cum perinde ſit quænam hoc caſu infinita fieri aſſumatur, ponamus $z$ fieri infinitam, ſi quidem Superficies in infinitum porrigatur. Naturam ergo hujus partis in infinitum abeuntis inveſtigaturi ponamus eſſe $z = \infty$: atque nunc potiſſimum ſpectari debet terminus primus $\alpha zz$, utrum is adſit an vero deficiat. Adſit ergo primum iſte terminus in æquatione: atque præ eo termini $yz$ & $x$ evaneſcent, habebiturque pro parte in infinitum excurrente hæc æquatio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \theta y + \iota x = 0,$$

ex qua porro omnes termini, qui non ſunt infiniti, vel infinities minores ſaltem quam $\alpha zz$, evaneſcunt.

105. Statuamus omnes terminos, in quibus variabiles duas

tenent dimenſiones adeſſe; quæcunque enim fuerit Superficies, in ejus æquatione generaliſſima ſemper omnes inerunt termini ſummarum dimenſionum, neque idcirco hypotheſis, qua omnes terminos duarum dimenſionum adeſſe ponimus, univerſalitati ſolutionis ullam vim infert. Quando autem termini $yz$ & $xz$ adſunt, præ iis termini $\theta y$ & $\iota x$ evaneſcunt; relinqueturque hæc æquatio CAP. V.

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx = 0,$$

ex qua elicitur

$$z = \frac{-\beta y - \gamma x \pm \sqrt{((\beta\beta - 4\alpha\delta)yy + (2\beta\gamma - 4\alpha\epsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx)}}{\alpha}.$$

Hac igitur æquatione natura portionis in infinitum extenſæ exprimitur.

106. Si quam igitur Superficies habeat portionem in infinitum extenſam, ea congruet cum portione infinita Superficiei, quæ exprimitur hac æquatione

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx = 0,$$

ita ut hæc Superficies ſit quaſi Aſymtota illius Superficiei æquatione generali expreſſæ. Quia vero in hac æquatione tres variabiles ubique duas habent dimenſiones, erit ea pro Superficie conica, Verticem in initio Coordinatarum, ubi omnes ſimul evaneſcunt, habente: ſemper ergo exhiberi poteſt Superficies conica, quæ erit Aſymtota Superficiei propoſitæ, ſi quidem in infinitum extenditur; ſeu cujus portio infinita cum Superficie propoſita vel penitus congruit, vel intervallo tantum finito ab eo eſt remota. Uti ergo ramos Curvarum in infinitum abeuntes per Lineas rectas Aſymtotas diſtinximus, ita Superficierum partes in infinitum extenſas per Superficies conicas Aſymtotas diſtinguere licebit.

107. Quoties ergo Superficies Aſymtota conica erit realis, toties Superficies ipſa in infinitum extenditur; atque ita qui-

APPEND. dem ut utriuſque partes infinitæ congruant; ſicque ex natura Superficiei Aſymtotæ natura ipſius Superficies propoſitæ colligi poterit. Quod ſi autem Superficies Aſymtota fiat imaginaria, ipſa Superficies nullam habebit partem in infinitum extenſam, ſed tota ſpatio finito includetur. Ad Superficies ergo ſecundi ordinis, quæ in ſpatio finito contineantur, indagandas, tantum opus eſt, ut videamus quibus in caſibus æquatio pro Superficie Aſymtota fiat imaginaria; quod fit, ſi tota Superficies hæc in punctum unicum evaneſcit. Namque ſi ullam extenſionem haberet, vel punctum extra Verticem ſitum, neceſſario in infinitum expandi deberet, propterea quod ſupra oſtendimus, totam rectam quæ per verticem & unum Superficiei punctum ducitur, in ipſa Superficie eſſe poſitum.

108. Quando ergo Superficies conica Aſymtota, hac æquatione expreſſa

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx = 0,$$

in unicum punctum abit, omnes ejus ſectiones per Verticem factæ pariter in idem punctum evaneſcere debent. Primum ergo, facto $z = 0$, æquatio $\delta yy + \epsilon xy + \zeta xx = 0$, debet eſſe impoſſibilis, niſi ſit $x = 0$ & $y = 0$, quod evenit ſi fuerit $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$. Deinde idem evenire debet poſito vel $x = 0$ vel $y = 0$: erit ergo $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$, & $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$. Niſi ergo in æquatione pro Superficie ſecundi ordinis

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

fuerit $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$, Superficies certo habebit partes in infinitum extenſas.

109. Neque vero hæ tres conditiones ſufficiunt ad Superficiem in ſpatium finitum includendam: requiritur inſuper ut valor ipſius $z$ ex æquatione Aſymtotica ſupra erutus fiat imaginarius; quod fit ſi iſta expreſſio

($\beta\beta$ —

$$(\beta\beta - 4\alpha\delta)yy + 2(\beta\gamma - 2\alpha\epsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx$$ 

perpetuo obtineat valorem negativum, ſi quidem pro utraque variabili $x$ & $y$ valores quicunque præter o ſubſtituantur. Quod, cum $\beta\beta - 4\alpha\delta$ & $\gamma\gamma - 4\alpha\zeta$ ſint quantitates negativæ, fiet ſi $(\beta\gamma - 2\alpha\epsilon)^2$ minor quam $(\beta\beta - 4\alpha\delta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)$; hoc eſt, ſi fuerit $\alpha\epsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ minor quam $\beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$; ſi quidem $\alpha$ habuerit valorem affirmativum, quoniam illam æquationem per $\alpha$ diviſimus. Quod ſi vero $\alpha$ habeat valorem affirmativum, ob ſuperiores æquationes $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; & $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$; coëfficientes $\delta$ & $\zeta$ erunt affirmativi.

110. Superficies ergo ſecundi ordinis in ſpatio finito continebitur, ſi in ejus æquatione quatuor ſequentes conditiones locum habeant; nempe ſi ſit

$4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$

&

$\alpha\epsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ minor quam $\beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$.

Hincque genus primum Superficierum ſecundi ordinis definimus, ad quod eæ ſpecies omnes pertinent, quæ non in infinitum excurrunt, ſed in ſpatio finito includuntur. Ad hoc ergo genus pertinet Globus, cujus æquatio eſt

$$zz + yy + xx = aa,$$

cum enim hic ſit $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\zeta = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; $\epsilon = 0$, quatuor inventis conditionibus omnibus ſatisfit. Generalius vero hic pertinebit æquatio iſta

$$\alpha zz + \delta yy + \zeta xx = aa$$

quæ ſi $\alpha$, $\delta$, $\zeta$, fuerint quantitates affirmativæ, ſemper eſt pro Superficie clauſa, niſi unus duove coëfficientes evaneſcant.

111. Perſpectis his quatuor conditionibus, quibus Superficies

APPEND. in ſpatium finitum redigitur ; ſi proponatur æquatio ſecundi ordinis quæcunque determinata , ſtatim dijudicari poterit utrum Superficies ea æquatione expreſſa habeat partes in infinitum extenſas , an nullas. Quod ſi enim unica illarum quatuor conditionum deſit , Superficies certo in infinitum extenditur. Hoc autem caſu nonnullæ ſubdiviſiones ſunt faciendæ , quibus ſingularis varietas partibus in infinitum extenſis inducitur. Prima ſubdiviſio ergo conſtituatur , ſi fuerit

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 \text{ major quam } \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$$

quo caſu Superficies in infinitum extendetur , atque Superficiem conicam pro Aſymtota habebit , uti jam ante oſtendimus. Hicque caſus e Diametro eſt oppoſitus præcedenti , quo tota Superficies in ſpatio finito continetur.

112. Præterea autem dantur caſus quidam intermedii ; quibus , etſi Superficies in infinitum abit , ſimili tamen modo inter duos præcedentes locum tenet quo Parabola inter Ellipſin & Hyperbolam continetur. Caſus iſte oritur ſi fuerit

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta,$$

eritque propterea

$$\alpha z = -\beta y - \gamma x + y\sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\delta)} + x\sqrt{(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}.$$

Habebit ergo æquatio Aſymtotica

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0\,;$$

duos Factores ſimplices , qui erunt vel reales , vel imaginarii , vel inter ſe æquales. Triplex iſta diverſitas ergo tria genera Superficierum in infinitum extenſarum præbet , ſicque omnino quinque genera Superficierum ſecundi ordinis ſumus adepti , quæ nunc diligentius proſequemur.

113. Quia , mutando poſitionem ternorum Axium , quibus Coordinatæ ſunt parallelæ , æquatio generalis ad formam ſim-

pliciorem reduci poteſt, iſta reductione ita utamur, ut æquationem generalem pro Superficiebus ſecundi ordinis ad formam ſimpliciſſimam redigamus, quæ tamen omnes ſpecies æque ac generalis in ſe complectatur. Cum igitur æquatio generalis pro Superficiebus ſecundi ordinis ſit

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

quæramus æquationem inter alias ternas Coordinatas $p$, $q$ & $r$, quæ quidem ſe mutuo in eodem puncto, quo ternæ priores decuſſent. Ad hoc ex §. 92. ſtatuatur

$$x = p(\text{coſ}.k.\text{coſ}.m - \text{ſin}.k.\text{ſin}.m.\text{coſ}.n) + q(\text{coſ}.k.\text{ſin}.m + \text{ſin}.k.\text{coſ}.m.\text{coſ}.n) - r.\text{ſin}.k.\text{ſin}.n$$

&

$$y = -p(\text{ſin}.k.\text{coſ}.m + \text{coſ}.k.\text{ſin}.m.\text{coſ}.n) - q(\text{ſin}.k.\text{ſin}.m - \text{coſ}.k.\text{coſ}.m.\text{coſ}.n) - r.\text{coſ}.k.\text{ſin}.n$$

atque

$$z = -p.\text{ſin}.m.\text{ſin}.n + q.\text{coſ}.m.\text{ſin}.n + r.\text{coſ}.n,$$

unde reſultet iſta æquatio

$$App + Bqq + Crr + Dpq + Epr + Fqr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

114. Jam anguli illi arbitrarii $k$, $m$, & $n$ ita definiri poterunt, ut tres coëfficientes $D$, $E$, & $F$ evaneſcant. Quanquam enim calculus nimis ſit prolixus, quam ut angulorum illorum determinatio actu oſtendi poſſit; tamen ſi quis forte dubitet, an ſemper iſta eliminatio ad valores reales angulorum illorum perducat, is certe concedere debebit, duos ſaltem coëfficientes $D$ & $E$ nihilo æquales reddi poſſe. Hoc autem ſi fuerit effectum, poſitio tertii Axis, cui Ordinatæ $r$ ſunt parallelæ in plano ad Ordinatas $p$ normali, facile ita mutari poteſt, ut etiam coëfficiens $F$ evaneſcat. Statuatur enim $q = t.\text{ſin}.i + u.\text{coſ}.i$ & $r = t.\text{coſ}.i - u.\text{ſin}.i$, ita ut, loco termini $qr$, novus terminus $tu$ ingrediatur, cujus coëfficiens ope an-

APPEND. guli $i$ nihilo æqualis fieri poterit. Hoc igitur modo æquatio generalis pro Superficiebus ſecundi ordinis ad hanc formam perducetur

$$App + Bqq + Crr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

115. Nunc præterea Coordinatæ $p$, $q$, $r$ datis quantitatibus ita augeri diminuive poterunt, ut coëfficientes $G$, $H$ & $I$ evaneſcant; quod fiet mutato tantum puncto illo, unde omnes Coordinatæ initium habent. Atque hoc modo omnes Superficies ſecundi ordinis in hac æquatione continebuntur

$$App + Bqq + Crr + K = 0,$$

ex qua intelligitur unumquodque trium planorum principalium per initium Coordinatarum ductorum Superficiem in duas partes ſimiles & æquales biſecare. Omnis ergo Superficies ſecundi ordinis non ſolum unum habet planum diametrale, ſed adeo tria, quæ ſe mutuo in eodem puncto normaliter interſecent; quod punctum propterea Centrum Superficiei conſtituet, etiamſi in nonnullis caſibus hoc Centrum in infinitum diſtet. Simili ſcilicet modo, quo omnes Sectiones conicæ Centro dicuntur præditæ, etiamſi in Parabola Centrum a Vertice infinite removeatur.

116. Perducta ergo æquatione, qua omnes Superficies ſecundi ordinis continentur, ad formam ſimpliciſſimam, primum harum Superficierum genus exhibebit iſta æquatio

$$Apq + Bqq + Crr = aa,$$

ſi quidem omnes tres coëfficientes A, B, & C valores obtineant affirmativos. Superficies igitur ad hoc primum genus pertinentes non ſolum totæ in finito ſpatio includentur, ſed omnes quoque Centrum habebunt, in quo tria plana diametralia ſe mutuo ad angulos rectos decuſſant. Sit $C$ Centrum hujus figuræ, & $CA$, $CB$, $CD$ Axes illi principales inter ſe nor-

TAB. XXXVIII *Fig.* 143.

Digitized by Google

males, quibus Coordinatæ $p$, $q$, $r$ ſunt parallelæ erunt tria plana diametralia $ABab$; $ADa$; & $BDb$, quibus hoc Corpus in binas portiones ſimiles æquales ſecabitur. 

117. Ponatur $r = o$; & æquatio $App + Bqq = aa$ exprimet naturam ſectionis principalis $ABab$; quæ idcirco erit Ellipſis Centrum habens in $C$, cujus ſemiaxes erunt $CA = Ca = \frac{a}{\surd A}$; & $CB = Cb = \frac{a}{\surd B}$. Si ponatur $q = o$, æquatio $App + Crr = aa$, erit pro ſectione principali $ADa$, quæ pariter erit Ellipſis Centrum habens in $C$, cujus ſemiaxes erunt $CA = Ca = \frac{a}{\surd A}$, & $CD = \frac{a}{\surd C}$. Poſito autem $p = o$, prodibit pro tertia ſectione principali $BDb$ æquatio $Bqq + Crr = aa$, quæ etiam erit Ellipſis Centrum habens in $C$ & ſemiaxes $CB = Cb = \frac{a}{\surd B}$, & $CD = \frac{a}{\surd C}$. Cognitis autem his tribus ſectionibus principalibus, ſeu tantum earum ſemiaxibus $CA = \frac{a}{\surd A}$; $CB = \frac{a}{\surd B}$ & $CD = \frac{a}{\surd C}$, natura hujus Corporis determinatur & cognoſcitur. Hinc primum iſtud Superficierum ſecundi ordinis genus *Elliptoides* appellari conveniet, quia tres ejus ſectiones principales ſunt Ellipſes.

118. Sub hoc genere continentur tres ſpecies præ primis notatu dignæ. Prima eſt, ſi omnes tres Axes principales $CA$, $CB$, & $CD$ inter ſe fuerint æquales, quo caſu tres ſectiones principales abibunt in Circulos, ipſumque Corpus in Globum, cujus æquatio, uti ſupra vidimus, erit

$$pp + qq + rr = aa.$$

Secunda ſpecies eos complectitur caſus, quibus duo tantum Axes principales ſunt inter ſe æquales. Sit nimirum $CD = CB$, ſeu $C = B$, atque ſectio $BDb$ fiet Circulus, ex æquatione autem $App + B(qq + rr) = aa$ intelligitur omnes ſectiones huic parallelas pariter fore Circulos; unde hoc Corpus erit Sphæroides ſive oblongum, ſi $AC$ major ſit quam

APPEND. $BC$; ſive compreſſum ſi $AC$ ſit minor quam $BC$. Tertia denique ſpecies ea complectitur Corpora, in quibus coëfficientes A, B, C ſunt inæquales, quæ ideo nomen generale *Elliptoides* retinebunt.

119. Sequentia genera Superficierum ſecundi ordinis hac continebuntur æquatione

$$\mathrm{A}pp + \mathrm{B}qq + \mathrm{C}rr = aa,$$

Ac primo quidem ſi nullus coëfficientium A, B, C prorſus deſit; eorum autem, vel unus vel duo, valores habeant negativos. Sit unus tantum negativus, atque conſideremus hanc æquationem

$$\mathrm{A}pp + \mathrm{B}qq - \mathrm{C}rr = aa,$$

TAB. XXXVIII. Fig. 144. in qua jam A, B, C numeros affirmativos denotare ponimus. Quod ad Centrum hujus Corporis & plana diametralia attinet, omnia eodem modo ſunt comparata, ut ante. Patet igitur hujus Corporis ſectionem principalem primam $ABab$ eſſe Ellipſin, cujus ſemiaxis $AC = \frac{a}{\sqrt{\mathrm{A}}}$, alterque $BC = \frac{a}{\sqrt{\mathrm{B}}}$. Binæ reliquæ ſectiones principales $Aq$, $BS$ erunt Hyperbolæ Centrum in $C$ & ſemiaxem conjugatum $= \frac{a}{\sqrt{\mathrm{C}}}$ habentes.

120. Repræſentabit ergo hæc Superficies ſpeciem infundibuli, furſum & deorſum ſecundum Hyperbolas divergens. Unde iſta Superficies Aſymtoton habebit Conum æquatione $\mathrm{A}pp + \mathrm{B}qq - \mathrm{C}rr = 0$ expreſſum, Verticem in Centro $C$ habentem, & cujus latera ſunt Aſymtota Hyperbolarum. Stabit autem iſte Conus Aſymtotos intra Superficiem, eritque Conus rectus ſi fuerit $\mathrm{A} = \mathrm{B}$; ſcalenus vero ſi A non ipſi B æquabitur. Axis autem Coni erit recta $CD$ normalis ad

Digitized by Google

planum $ABa$. Ceterum omnes ſectiones Axi $CD$ normales erunt Ellipſes ſimiles Ellipſi $ABab$, ſectiones vero plano $ABab$ normales omnes erunt Hyperbolæ: unde iſtas Superficies *elliptico-hyperbolicas* vocari conveniet, Aſymtoto ſuo conico circumſcriptas. Hujus igitur Superficies nobis conſtituent genus ſecundum.

121. Species in hoc genere iterum tres notari poterunt: quorum prima erit, ſi $a = 0$, quo caſu Ellipſis $ABab$ in punctum evaneſcit, & Hyperbolæ in lineas rectas abibunt: Superficies vero ipſa cum Aſymtota ſua penitus confundetur, ex quo hæc prima ſpecies complectetur omnes Conos, ſive rectos ſive ſcalenos; unde nova ſubdiviſio fieri poſſet. Altera ſpecies erit ſi fiat $A = B$; quo caſu Ellipſis $ABab$ in Circulum mutatur, & ipſa Superficies fiet rotunda ſeu tornata. Orietur ſcilicet hæc Superficies, ſi Hyperbola quæcunque circa Axem conjugatum convertatur. Tertia ſpecies ab ipſo genere non diſcrepabit.

122. Tertium genus definiamus, ſi duo coëfficientes terminorum $pp$, $qq$, & $rr$ fiant negativi, cujus ergo æquatio ſit

$$App - Bqq - Crr = aa.$$

Poſito ergo $r = 0$, erit prima ſectio principalis Hyperbola $EAFeaf$ Centrum habens in $C$, cujus ſemiaxis tranſverſus erit $= \frac{a}{\sqrt{A}}$, & ſemiaxis conjugatus $= \frac{a}{\sqrt{B}}$. Altera ſectio principalis, poſito $q = 0$, pariter erit Hyperbola $AQ, aq$, eodem ſemiaxe tranſverſo prædita, ſed cujus Axis ſemiconjugatus erit $= \frac{a}{\sqrt{C}}$: tertia ſectio principalis fit imaginaria. Tota denique hæc Superficies intra Superficiem conicam Aſymtotam erit ſita: unde hoc genus vocari poteſt *hyperbolico-hyperbolicum* Cono Aſymtoto inſcriptum. Si fiat $B = C$, Superficies erit rotunda, orta ex converſione Hyperbolæ circa ſuum Axem tranſverſum, quo caſu ſpecies peculiaris conſtitui poſſet. Sin

TAB. XXXIX. *Fig.* 145.

Digitized by Google

APPEND. autem ponatur $a = o$, oritur Superficies conica, quam jam, tanquam ſpeciem generis præcedentis, ſumus contemplati.

123. Ad ſequentia genera cognoſcenda ponamus unum coëfficientium A, B, C evaneſcere. Sit igitur $C = o$, atque æquatio generalis §. 114. inventa erit

$$App + Bqq + Gp + Hq + Ir + K = o,$$

in qua, augendo ſeu diminuendo Ordinatas $p$ & $q$, termini $Gp$ & $Hq$, non vero $Ir$ tolli poterit. Relinquetur ergo terminus $Ir$ in æquatione: ejus vero ope tolli poterit terminus ultimus K, unde ejuſmodi æquationem habebimus

$$App + Bqq = ar,$$

cujus duo caſus ſunt perpendendi. Prior ſi uterque coëfficiens A & B fuerit affirmativus: poſterior ſi alter ſit negativus. Utroque autem caſu Centrum Superficiei in Axe $CD$ erit ſitum ſed ad diſtantiam infinitam remotum.

124. Sint primo ambo coëfficientes A & B affirmativi: quo caſu conſtituatur genus quartum, æquatione hac contentum

$$App + Bqq = ar.$$

TAB. XXXIX. *Fig.* 146. Prima ergo ſectio principalis oriunda ſi ponatur $r = o$, in punctum evaneſcet; altera poſito $q = o$; & tertia poſito $p = o$, utraque erit Parabola. Nempe $MAm$ & $NAn$. Cum igitur hujus Superficiei omnes ſectiones ad Axem $AD$ normales ſint Ellipſes; ſectiones vero per hunc ipſum Axem factæ Parabolæ, hujus generis Corpora *elliptico-parabolica* appellabimus. Cujus ſpecies ſunt notandæ duæ: altera ſi $A = B$, quo caſu oritur Corpus rotundum, *conoides parabolicum* vocatum: altera vero ſi $a = o$, fitque $App + Bqq = bb$, quæ dat Cylindros, tam rectos ſi $A = B$, quam ſcalenos ſi A & B fuerint inæquales.

125. Quintum

125. Quintum genus continebitur hac æquatione 

$$Ap p - Bqq = ar,$$

cujus ſectio principalis prima, facto $r = 0$, erunt duæ lineæ rectæ $Ee$, $Ff$, ſe mutuo in puncto $A$ decuſſantes. Omnes vero ſectiones huic parallelæ erunt Hyperbolæ ſua centra in Axe $AD$ habentes, & intra Aſymtotas rectas $Ee$ & $Ff$ conſtitutæ. Duo igitur plana, quæ plano $ABC$ in Lineis $Ee$ & $Ff$ normaliter inſiſtunt, in infinitum cum Superficie propoſita congruent, ideoque hæc Superficies pro Aſymtoto habebit duo plana ſe mutuo decuſſantia, ſectiones reliquæ principales in planis $ACD$ & $ABd$ factæ erunt Parabolæ: unde Superficies ad hoc genus pertinentes vocabimus *parabolico-hyperbolicas* duo plana pro Aſymtotis habentes: cujus ſpecies, ( ſi $a = 0$, ut ſit $App - Bqq = bb$, ) erit Cylindrus hyperbolicus, cujus omnes ſectiones ad Axem $AD$ normales erunt Hyperbolæ inter ſe æquales: ſi inſuper ſit $b = 0$, oriuntur duo illa ipſa plana aſymtotica. Tab. XXXIX. Fig. 147.

126. Sextum denique genus Superficierum ſecundi ordinis complectetur hæc æquatio

$$App = aq,$$

quæ præbet Cylindrum Parabolicum, cujus omnes ſectiones Axi $AD$ normales erunt Parabolæ ſimiles & æquales, ita ut ſingularum Vertices in rectam $AD$ incidant & Axes inter ſe ſint paralleli. Ad hæc igitur ſex genera omnes Superficies ſecundi ordinis reduci poterunt, ita ut nulla exhiberi poſſit, quæ non in uno horum generum contineatur. Ceterum, ſi in genere ultimo fiat $a = 0$, ut ſit $App = bb$, hæc æquatio præbebit duo plana inter ſe parallela, quæ quaſi ſpeciem hujus generis conſtituent. Similitudo ſcilicet hic, uti in Lineis ſecundi ordinis obtinet, ubi vidimus duas rectas ſe decuſſantes Hyperbolæ ſpeciem, duas autem Lineas parallelas Parabolæ ſpeciem conſtituere.



Digitized by Google

APPEND. 127. Quanquam hæc ſex genera ex æquatione ſimpliciſſima, ad quam Superficies ſecundi ordinis reducere licet, formavimus; tamen nunc facile erit, ſi æquatio quæcunque ſecundi gradus ſit propoſita, genus aſſignare ad quod Superficies pertineat. Quod ſi enim propoſita fuerit hæc æquatio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

judicium ex ſupremis terminis, in quibus duæ variabilium occurrunt dimenſiones, petendum erit; ſpectari ſcilicet debebunt hi termini

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx,$$

in quibus ſi fuerit

$4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$
&
$\alpha\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta$ minor quam $\beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$,

Superficies erit clauſa & ad genus primum, quod Elliptoides vocavimus, pertinebit.

128. Si una pluresve harum conditionum deſint; neque tamen ſit $\alpha\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$, Superficies vel ad ſecundum vel ad tertium genus pertinebit, eritque corpus hyperbolicum Cono Aſymtoto præditum, eique vel circumſcriptum in genere ſecundo, vel inſcriptum in genere tertio. At, ſi fuerit $\alpha\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$, quo caſu expreſſio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx,$$

reſolvi poterit in duos Factores ſimplices, ſive imaginarios ſive reales. Caſu priori Superficies pertinebit ad genus quartum, poſteriori vero ad quintum. Quod ſi denique iſta expreſſio duos habeat Factores æquales, ſeu ſit quadratum, tum orietur genus ſextum. Sicque ſtatim facile dijudicari poterit, ad quodnam genus quævis æquatio propoſita pertineat; diffi-

cilius tantum erit judicium circa genus ſecundum & tertium : quæ ambo ideo in unum conflari poſſent. 

129. Simili modo Superficies tertii & ſequentium ordinum pertractari atque in genera dividi poterunt. Spectari ſcilicet tantum debebunt æquationis generalis termini ſupremi, & conſequenter, pro Superficiebus tertii ordinis, ii in quibus Coordinatæ tres obtinent dimenſiones, qui erunt

$$\alpha z^3 + \beta yzz + \gamma y^2 z + \delta x^2 z + \epsilon xzz + \zeta xyz + \&c..$$

Primum igitur diſpiciendum eſt, utrum hi termini conjunctim ſumti, ſeu æquationis membrum ſupremum, reſolvi poſſit in Factores ſimplices an non. Si reſolutionem in Factores reſpuat, habebit Superficies Conum tertii ordinis pro Aſymtoto. Quia autem natura hujus Coni exprimitur ſupremo membro nihilo æquali poſito, plures hujuſmodi Coni tertii ordinis dabuntur, ex quorum diverſitate hinc plura Superficierum genera conſtituentur. Quamvis enim Coni ſecundi ordinis omnes ad unum genus referuntur, quia ſunt vel recti vel ſcaleni; tamen in tertio ordine multo major varietas locum invenit.

130. Expoſitis ergo his generibus, conſiderandi ſunt caſus, quibus ſupremum membrum in Factores ſimplices reſolvi poteſt, ſive ſint reales ſive imaginarii. Habeat primum unum Factorem ſimplicem, qui erit realis : ex eo Superficies habebit Aſymtotam planam. Alter Factor nihilo æqualis poſitus vel dabit æquationem poſſibilem vel non : ſi æquatio fuerit poſſibilis, niſi omnes Coordinatæ evaneſcant, unica erit Aſymtota plana : ſin autem ſit impoſſibilis, Superficies duas habebit Aſymtotas, alteram planam, alteram Conum ſecundi ordinis. Quod ſi habeat tres Factores ſimplices, quia unus ſemper eſt realis, ſi bini reliqui ſint vel imaginarii, vel reales, duo nova genera oriuntur. Denique ſi omnes tres Factores ſimplices ſint reales, prout duo vel omnes ſint inter ſe æquales, adhuc duo genera conſtitui poterunt. Nulla autem in hoc ordine datur Superficies, quæ non in infinitum extendatur.



Digitized by Google

## CAPUT VI.

### *De interſectione duarum Superficierum.*

131. Supra jam expoſita eſt methodus inveſtigandi naturam ſectionis, quæ oritur ſi Superficies quæcunque a plano ſecatur. Cum enim Linea curva, quam ſectio format, tota poſita ſit in eodem plano, quo ſectio eſt facta, binas Coordinatas, quarum relatione natura hujuſmodi Linearum curvarum exprimi ſolet, in eodem plano aſſumſimus, ut hoc pacto cognitio ad receptam rationem reduceretur. At, ſi Superficies ſecans non fuerit plana, quoniam tum ſectio non in eodem plano jacebit, ejus natura duabus Coordinatis comprehendi nequit: quapropter alio modo erit utendum, ad hujuſmodi ſectiones æquationibus includendas, quibus cujuſque puncti poſitio vera indicetur.

132. Punctorum autem non in eodem plano ſitorum loca definiri poſſunt, ſi tria plana inter ſe normalia in ſubſidium adhibeantur, atque pro quovis puncto ternæ illæ diſtantiæ aſſignentur, quibus id a quolibet plano diſtat. Hinc tres variabiles requirentur ad naturam Lineæ curvæ non in eodem plano conſtitutæ exprimendam; ita ut, ſi una pro libitu definiatur, ex ea binæ reliquæ valores determinatos obtineant. Una igitur æquatio inter tres illas Coordinatas non ſufficit ad hoc præſtandum; quippe, quæ indolem univerſæ Superficiei cujuſdam indicaret; quocirca duabus opus erit æquationibus, quarum ope, ſi uni variabili datus valor tribuatur, ſimul binarum reliquarum valores determinentur.

133. Natura igitur cujuſque Lineæ curvæ, quam in eodem plano conſtitutam eſſe non conſtat, commodiſſime exprimitur duabus æquationibus inter tres variabiles, puta $x$, $y$, $z$, quæ totidem Coordinatas inter ſe normales repræſentabunt. Ope duarum ergo hujuſmodi æquationum binæ variabiles ex tertia

determinari poterunt, æquabitur ſcilicet tam $y$ quam $z$ Functioni cuipiam ipſius $x$. Poterit etiam pro arbitrio una variabilium eliminari; unde tres æquationes duas tantum variabiles involventes formabuntur, una inter $x$ & $y$, altera inter $x$ & $z$, & tertia inter $y$ & $z$. Harum trium vero æquationum quævis per binas reliquas ſponte determinatur, ita ut, ſi habeantur æquationes inter $x$ & $y$, & inter $x$ & $z$, ex his tertia jam per eliminationem ipſius $x$ inveniatur.

TAB. XL. Fig. 148.

134. Sit ergo propoſita Linea quæcunque curva non in eodem plano poſita, cujus unum quoddam punctum ſit $M$. Sumantur pro arbitrio tres Axes invicem normales $AB$, $AC$, & $AD$, quibus tria plana invicem normalia $BAC$, $BAD$ & $CAD$ determinantur. Ex puncto Curvæ $M$ in planum $BAC$ demittatur perpendiculum $MQ$, & ex puncto $Q$ ad Axem $AD$ ducatur normalis $QP$, erunt $AP$, $PQ$ & $QM$ tres illæ Coordinatæ, inter quas ſi duæ dentur æquationes, natura Curvæ determinatur. Vocentur ergo $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; & ex duabus æquationibus inter $x$, $y$ & $z$ propoſitis, eliminando $z$ formetur æquatio duas tantum variabiles $x$ & $y$ continens, quæ determinabit poſitionem puncti $Q$ in plano $BAC$; atque ſingula puncta $Q$ ex ſingulis $M$ orta præbebunt Lineam curvam $EQF$, cujus natura æquatione illa inter $x$ & $y$ inventa exprimetur.

135. Hoc igitur modo ex duabus æquationibus inter tres Coordinatas propoſitis facile cognoſcitur natura Curvæ $EQF$, quæ formatur demittendis ex ſingulis Curvæ indagandæ punctis $M$ perpendiculis $MQ$ in planum $BAC$. Curva autem hæc $EQF$ vocatur *projectio* Curvæ $GMH$ in planum $BAC$. Quemadmodum autem projectio in plano $BAC$ facta invenitur eliminando variabilem $z$; ita ejuſdem Curvæ projectio in plano $BAD$ vel in plano $CAD$ obtinebitur, ſi vel variabilis $y$ eliminetur vel $x$. Una autem projectio $EQF$ non ſufficit ad Curvam $GMH$ cognoſcendam, ſin autem pro ſingulis punctis $Q$ cognita fuerint perpendicula $QM = z$, ex projectione $EQF$ ipſa Curva $GMH$ facile conſtruetur.

Digitized by Google

 Ad hoc igitur opus eſt, ut præter æquationem inter $x$ & $y$, qua natura projectionis, exprimitur, habeatur æquatio inter $z$ & $x$, vel inter $z$ & $y$, vel etiam inter tres $z$, $x$, $y$, ex qua longitudo perpendiculi $QM = z$ pro quovis puncto $Q$ innoteſcat.

136. Cum autem æquatio inter $z$ & $x$ exprimat projectionem Curvæ $GMH$ in plano $BAD$ factam, æquatio autem inter $z$ & $y$ projectionem in plano $CAD$, atque æquatio inter tres variabiles $z$, $y$ & $x$ exhibeat Superficiem, in qua curva $GMH$ verſetur: manifeſtum eſt primum ex duabus projectionibus ejuſdem Curvæ $GMH$ in duobus planis factis ipſam Curvam $GMH$ cognoſci. Tum vero perſpicuum eſt, ſi detur Superficies, in qua Linea Curva $GMH$ contineatur, atque præterea ejus projectio in quodam plano, pariter Curvam illam fore cognitam. Erigantur enim ex ſingulis projectionis punctis rectæ normales $QM$, quarum interſectio cum Superficie definiet Curvam $GMH$ quæſitam.

137. His præmiſſis, quæ ad indolem cujuſque Curvæ non in eodem plano conſtitutæ cognoſcendam pertinent, non difficile erit interſectionem duarum quarumvis Superficierum definire. Quemadmodum enim interſectio duorum planorum eſt Linea recta, ita interſectio duarum Superficierum quarumvis erit Linea, ſive recta ſive curva; hæcque vel in eodem plano poſita vel ſecus. Utcunque autem fuerit comparata, ſingula ejus puncta ad utramque Superficiem pertinebunt, ideoque in æquatione utriuſque Superficiei continebuntur. Quod ſi ergo ambæ Superficies exprimantur æquationibus inter ternas Coordinatas, quæ ad eadem tria plana principalia inter ſe normalia ſeu ad eoſdem tres Axes inter ſe normales $AB$, $AC$ & $AD$ referantur, tum ambæ iſtæ æquationes conjunctæ naturam interſectionis exprimunt.

138. Propoſitis ergo duabus Superficiebus ſe mutuo ſecantibus, utriuſque natura exprimi debet æquatione inter tres Coordinatas, quæ ad eoſdem Axes principales referantur: ſicque habebuntur duæ æquationes inter tres Coordinatas $x$,

Digitized by Google

$y$ & $z$, ex quibus ſi una eliminetur, æquatio inter binas reliquas præbebit projectionem interſectionis in plano, quod his duabus Coordinatis conſtituitur, factæ. Hoc igitur modo quoque interſectio cujuſque Superficiei a plano factæ inveſtigari poterit: cum enim æquatio generalis pro plano ſit $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$, ſi in æquatione Superficiei loco $z$ ſubſtituatur ejus valor ex illa æquatione oriundus, nempe $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$, prodibit æquatio pro projectione interſectionis in plano Coordinatarum $x$ & $y$ facta. Simul vero æquatio $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ pro quovis puncto $Q$ projectionis præbebit quantitatem perpendiculi $QM$ ad ipſam interſectionem pertingentis. 

139. Quod ſi eveniat ut æquatio pro projectione fiat impoſſibilis, uti ſi inveniretur $xx + yy + aa = 0$; tum hoc erit indicium, ambas Superficies ſe mutuo nuſquam interſecare. Sin autem æquatio projectionis in unicum punctum deducat, ſeu, ſi projectio in punctum evaneſcat, tum ipſa quoque interſectio erit punctum, ideoque ambæ Superficies ſe mutuo in puncto contingent; qui contactus itaque ex æquatione cognoſci poterit. Datur autem præterea contactus linearis, quando duæ Superficies ſe in infinitis punctis contingunt; Lineaque contactus vel erit recta vel curva. Recta ſcilicet erit, ſi planum tangat Cylindrum vel Conum: Conus rectus autem a Globo intus tangetur per Peripheriam Circuli. Qui contactus ex æquatione cognoſcentur, ſi pro projectione ejuſmodi prodierit æquatio, quæ duas habeat radices æquales, propterea quod contactus nil aliud eſt, niſi concurſus duarum interſectionum.

140. Ad hæc clarius explicanda ponamus Globum ſecari a plano quocunque. Sumamus æquationem ad Centrum Globi accommodatam $zz + yy + xx = aa$, pro plano autem utcunque poſito hæc habebitur æquatio

$$\alpha z + \beta y + \gamma x = f,$$

Digitized by Google

APPEND.

unde, cum ſit $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$, ſequens orietur æquatio inter $x$ & $y$ pro projectione

$$0 = ff - \alpha^2 a^2 - 2\beta f y - 2\gamma f x + (\alpha^2 + \beta\ )y^2 + 2\beta\gamma xy + (\alpha^2 + \gamma^2)xx,$$

quam patet eſſe Ellipſin, ſi quidem æquatio fuerit realis; ſin autem fuerit imaginaria Globus a plano nuſquam tangetur: at, ſi Ellipſis in punctum evaneſcat, planum & Globus ſe mutuo tangent. Qui caſus ut eruatur, quæratur

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha\sqrt{(a^2(\alpha^2 + \beta^2) - f^2 + 2\gamma f x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)xx)}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

ubi ſi $f$ ejuſmodi habuerit valorem, ut quantitas radicalis nunquam fieri poſſit realis, nullus dabitur contactus, neque interſectio.

141. Ponamus eſſe $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$ eritque

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha x\sqrt{-(\alpha\ + \beta^2 + \gamma^2)} \mp \alpha\gamma a\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

cui æquationi realiter ſatisfieri nequit, niſi ſit

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma\ )}}, \text{ \& } y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}.$$

Quare, ſi fuerit $fa = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$, planum, quod exprimitur æquatione $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$, Globum tanget; punctumque contactus habebitur, ſi capiatur

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}};\ y = \frac{\beta a}{\sqrt{(x^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}, \text{ \& } z = \frac{\alpha a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

quorum valorum veritas per Geometriam elementarem, ubi contactus Sphæræ a plano docetur, comprobari poteſt.

142. Hinc igitur generalis regula deducitur, cujus ope cognoſci poteſt, utrum Superficies quæcunque a plano aliave

ſuperficie

Digitized by Google

Superficie tangatur an non ? Eliminata enim ex ambabus æquationibus una variabili, videndum eſt an æquatio reſultans reſolvi poſſit in Factores ſimplices an minus. Si enim habeat duos Factores ſimplices imaginarios, dabitur contactus in puncto, quod innoteſcet ponendo utrumque Factorem $= 0$. Sin autem habeat duos Factores ſimplices reales eoſque inter ſe æquales, Superficies ſe mutuo ſecundum Lineam rectam tangent. Quod ſi vero illa æquatio habeat duos Factores non ſimplices æquales; ſeu, ſi fuerit per quadratum diviſibilis, tum ejus radix nihilo æqualis poſita exhibebit projectionem illius Lineæ, quæ ex contactu oritur. Hinc quoque patet ſi eadem illa æquatio quatuor habuerit Factores imaginarios, tum Superficies ſe mutuo in duobus punctis contingere.

143. Quo hæc plenius explicentur, inveſtigemus contactum Coni & Globi cujus Centrum in Axe Coni ſit poſitum. Æquatio pro Globo eſt $zz + yy + xx = aa$, pro Cono autem, $(f - z)^2 = mxx + nyy$, poſito quod Vertex Coni intervallo $f$ a Centro Globi ſit remotus. Eliminemus hinc variabilem $y$, eritque

$$(f - z)^2 = naa - nzz + (m - n)xx,$$

pro projectione interſectionis in plano Coordinatarum $x$ & $z$. Sit primum Conus rectus, ſeu $m = n$, eritque

$$z = \frac{f \pm \surd(n(1+n)aa - nff)}{1+n}.$$

Quare, ſi fuerit $f = a\surd(1+n)$, erit dupliciter $z = \frac{a}{\surd(1+n)}$, ideoque contactus erit linearis; ſcilicet per Circulum, cujus projectio in plano per Axem tranſeunte eſt Linea recta ad Axem normalis.

144. Pro Cono autem ſcaleno, ubi $m$, & $n$ ſunt inæquales, æquatio inventa videtur ſemper dare interſectionem, cum

APPEND. tamen ſæpius nulla exiſtat. Semper enim, ſi quidem $m$ ſuperet $n$, prodibit æquatio realis pro projectione interſectionis: at vero notandum eſt realitatem projectionis non ſemper indicare interſectionem realem. Ut enim ipſa interſectio ſit realis non ſufficit projectionem eſſe realem, ſed inſuper perpendicula a projectione ad interſectionem ducta realia eſſe oportet. Quamvis igitur omnis Curva realis habeat quaſvis projectiones reales; tamen non viciſſim ex realitate projectionis realitas ipſius Curvæ, quæ quæritur, concludi poteſt. Hæcque cautela perpetuo probe eſt adhibenda, ne realitate æquationum, quas pro projectionibus invenimus, abutamur.

145. Hoc incommodum evitabimus, ſi projectionem in plano Ordinatarum $x$ & $y$ quæramus: quia enim in hoc plano nullum datur punctum, cui non punctum in conica Superficie reſpondeat, ſi projectio in hoc plano fuerit realis, ipſa quoque interſectio erit realis. Cum igitur ſit $z = \surd(aa - xx - yy)$, fiet ex altera æquatione

$$f - \surd(aa - xx - yy) = \surd(mxx + nyy)$$

ſeu

$$aa + ff - (1+m)xx - (1+n)yy = 2f\surd(aa - xx - yy)$$

porroque

$$\left.\begin{matrix} (aa-ff)^2 \begin{matrix} -2(aa-ff) \\ -2(aa+ff)m \end{matrix}\Big\} x^2 \begin{matrix} -2(aa-ff) \\ -2(aa+ff)n \end{matrix}\Big\} y^2 + \\ (1+m)^2 x^4 + 2(1+m)(1+n)x^2y^2 + (1+n)^2 y^4 \end{matrix}\right\} = 0$$

unde fit

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{aa - ff + n(aa+ff) - (1+m)(1+n)xx +}{(1+n)^2} \\ \dfrac{2f}{(1+n)}\surd(n(1+n)aa - nff + (m-n)(1+n)xx) \end{matrix}\right\} = y^2$$

&

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l}\frac{aa - ff + m(aa+ff) - (1+m)(1+n)yy \pm}{(1+m)^2} \\ \frac{2f}{(1+m)^2}\sqrt{(m(1+m)aa - mff + (n-m)(1+m)yy)}\end{array}\right\} = x^2.$$

146. Ut igitur æquatio inventa habeat Factores, oportet eſſe vel $ff = (1+n)aa$ vel $ff = (1+m)aa$. Priori caſu fit

$$yy = \frac{naa - (1+m)xx}{1+n} \pm \frac{2fx\sqrt{(m-n)}}{(1+n)\sqrt{(1+n)}},$$

unde, ſi ſit $m$ minor quam $n$, neceſſe eſt ut ſit $x = 0$ & $y = \pm a\sqrt{\frac{n}{1+n}}$, & $z = \frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$. Dantur ergo duo puncta contactus ab Axe Coni utrinque æqualiter diſtantia. Sin autem fuerit $m$ major quam $n$, ſumi debet altera æquatio

$$xx = \frac{maa - (1+n)yy}{1+m} \pm \frac{2fy\sqrt{(n-m)}}{(1+m)\sqrt{(1+m)}},$$

quæ realis eſſe nequit, niſi ſit $y = 0$; quo caſu fit $x = \pm a\sqrt{\frac{m}{1+m}}$; & $z = \frac{a}{\sqrt{(1+m)}}$. Hocque ergo caſu dabuntur duo alia contactus puncta; contactus enim exiſtet in ea Coni parte, ubi eſt arctiſſimus. Similiter itaque modo in ſingulis caſibus contactus judicari debebit.

147. Modus autem longe facilior determinandi plana tangentia quarumcunque Superficierum deduci poteſt ex methodo inveniendi tangentes Linearum curvarum ſupra tradita. Sit natura Superficiei, cujus plana tangentia quærimus, expreſſa æquatione inter tres Coordinatas $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$, ex qua definiri oportet poſitionem plani Superficiem in puncto $M$ tangentis. Primum igitur conſideramus ſi Superficies ſecetur plano quocunque per punctum $M$ tranſeunte, ſectionis inde ortæ tangentem in puncto $M$ ſitam fore in plano tangente. Quare, ſi duarum hujuſmodi ſectionum tangentes TAB. XL. Fig. 149.



Digitized by Google

APPEND. in puncto $M$ invenerimus, planum quod his duabus rectis tangentibus definitur, ipſam Superficiem in puncto $M$ contingere debere.

148. Secetur ergo primum Superficies plano ad planum $APQ$ normalis, ſecundum rectam $QS$ parallelam Axi $AP$. Tum ſimili modo fiat ſectio per punctum $M$ pariter normalis ad planum $APQ$, ſed ſecundum rectam $QP$ Axi $AP$ normalem; ſeu, prior ſectio ſit normalis ad Axem $AB$, poſterior vero ad Axem $AP$. Sit Curva $EM$ prior ſectio, cujus quæratur tangens $MS$ rectæ $QS$ in puncto $S$ occurrens, ita ut ſit $QS$ ſubtangens. Sectio poſterior ſit Linea curva $FM$, cujus tangens ſit recta $MT$ & ſubtangens $QT$. Quibus inventis planum $SMT$ Superficiem in puncto $M$ tanget. Ducta ergo $ST$ dabit interſectionem plani tangentis cum plano $APQ$; atque, ſi ex $Q$ ad $ST$ normalis ducatur $QR$, tum erit $QR$ ad $QS$ uti ſinus totus ad tangentem anguli $MRQ$, quo planum tangens ad planum $APQ$ inclinatur.

149. Ponamus per methodum Tangentium ſupra traditam inventas eſſe ſubtangentes $QS = s$ & $QT = t$; erit $PT = t - y$, & $PX = s - \frac{sy}{t}$; unde fit $AX = x + \frac{sy}{t} - s$. Innoteſcit ergo hinc punctum $X$, in quo recta $ST$ Axem $AP$ trajicit: &, quia angulus $AXS = TSQ$, erit hujus anguli tangens $= \frac{t}{s}$, ex quo poſitio interſectionis plani tangentis cum plano $APQ$ cognoſcitur. Deinde, ob $ST = \sqrt{(ss + tt)}$, erit $QR = \frac{st}{\sqrt{(ss+tt)}}$, per quam ſi dividatur $QM$ prodibit tangens anguli inclinationis $MRQ = \frac{z\sqrt{(ss+tt)}}{st}$. Si porro ad $MR$ normalis ducatur $MN$, erit hæc cum ad planum tangens, tum ad ipſam Superficiem in puncto $M$ normalis. Ejus ergo poſitio colligitur ex $QN = \frac{zz\sqrt{(ss+tt)}}{st}$. Demittatur ex $N$ ad Axem $AP$ perpen-

dicularis $NV$, ob angulum $QNV = QST$, erit $PV = \frac{zz}{t} = QW$ & $NW = \frac{zz}{t}$. Quare, ſi hoc modo definiatur poſitio puncti $N$ in plano $APQ$, recta $NM$ erit normalis in Superficiem. 

150. Quemadmodum interſectio duarum Superficierum per projectiones indagari debet, ſupra jam eſt oſtenſum. Inquiramus autem cujus ordinis futura ſit projectio, pro ordine, ad quem Superficies referuntur. Ac primo quidem duæ Superficies primi ordinis, ſeu planæ, pro interſectione ejuſque projectione dant Lineam primi ordinis. Deinde quoque vidimus hanc projectionem ultra ſecundum ordinem aſſurgere non poſſe, ſi altera Superficies fuerit primi ordinis altera ſecundi. Simili modo manifeſtum eſt, ſi altera Superficies fuerit tertii ordinis altera primi, projectionem tertium gradum non eſſe tranſgreſſuram & ita porro. Sin autem duæ Lineæ ſecundi ordinis ſe mutuo ſecent, projectio interſectionis erit vel quarti ordinis vel inferioris; atque generaliter ſi altera Superficies ſit ordinis $m$, altera ordinis $n$, interſectionis projectio ad altiorem ordinem, quam qui numero $mn$ indicatur, nunquam referetur.

151. Quando neutra Superficierum ſe mutuo ſecantium eſt plana, plerumque ſectio earum mutua eſt Linea curva non in eodem plano conſtituta. Hoc tamen non obſtante fieri poteſt, ut tota ſectio in eodem plano ſit poſita; id quod eveniet ſi ambæ Superficierum æquationes junctim ſumtæ hujuſmodi æquationem $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ in ſe complectantur. Quod utrum eveniat, ex duabus æquationibus propoſitis definiantur binæ variabiles $z$ & $y$ per tertiam $x$, fiatque $z = P$ & $y = Q$, exiſtentibus P & Q Functionibus ipſius $x$. Tum diſpiciatur, an ejuſmodi numerus $n$ detur, ut in $P + nQ$ omnes poteſtates ipſius $x$ ſe mutuo tollant, præter infimam $x$ & terminos conſtantes. Quod ſi eveniat, fueritque $P + nQ = mx + k$, ſectio erit in eodem plano, hocque planum indicabitur æquatione $z + ny = mx + k$.

Digitized by Google

APPEND. 152. Sint, verbi gratia, propoſitæ ſequentes duæ Superficies ſecundi ordinis altera pro Cono recto $zz = xx + yy$, altera pro Superficie ſecundi generis elliptico-hyperbolica $zz = xx + 2yy - 2ax - aa$. Ex quibus cum ſit $xx + 2yy - 2ax - aa = xx + yy$, erit $y = \sqrt{(2ax + aa)}$ & $z = x + a$, quæ ultima æquatio jam indicat totam ſectionem in eodem plano eſſe ſitam, cujus poſitio determinetur æquatione $z = x + a$. Hac igitur ratione plurimæ quæſtiones ad naturam Superficierum pertinentes reſolvi poterunt. Quæ autem methodum hic expoſitam tranſgrediuntur, ea Analyſin infinitorum requirunt, ad quam ſcientiam hæc, quæ his libris tradita ſunt, viam præparant.

*FINIS.*

Digitized by Google

## AVIS AU RELIEUR.

Toutes les XL Planches doivent être mises ensemble à la fin d'un volume, sans faire attention au mot de *pag.* qui se trouve aux Tab. I. II. III. IV.

Quoique toutes ces Planches appartiennent au Tome II, on prie cependant le Relieur de les placer à la fin du Tome I, qui deviendra par ce moyen plus égal en grosseur au Tome II; et le Lecteur pourra même plus commodément s'en servir en lisant le Tome II.

## MONITUM AD BIBLIOPEGAM.

*Quadraginta Tabulæ, quibus instructus est Liber hic, omnes ad calcem alterutrius voluminis ponantur, nulla habita ratione verbi* pag. *quod legitur in Tab. I. II. III. et IV.*

*Quamquam illæ pertinent ad volumen secundum, tamen bene primo adjicientur; ſic enim amborum æquabitur magnitudo, & commoditati Lectoris consuletur.*

## AVISO AL LEGATORE.

Le quaranta Tavole di questo Libro devono tutte esser messe al fine d'uno dei due volumi, non guardando alla parola *pag.*, che si legge nelle Tavole I. II. III. IV.

Sebbene tutte queste riguardano il Tomo secondo, ciò non ostante sarà ben fatto di metterle al fine del Tomo primo. Cosi quel Tomo uguaglierà il secondo, ed il Lettore potrà meglio riguardare le figure leggendo il secondo volume.

## BERICHT AN DEN BUCHBINDER.

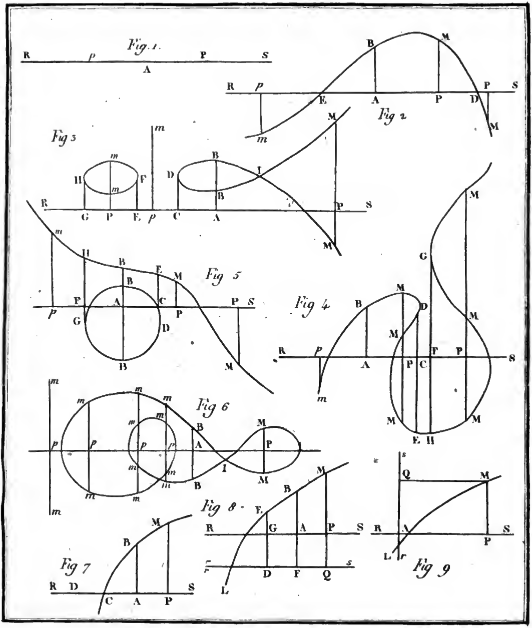
*Die 40 Kupfer Blætter müssen alle zu Ende eines Theils angebunden werden, ohne auf das Wort* pag.*, so auf denen 4 ersten Platten oben aufgestochen worden, achtung zu geben.*

*Obwohl alle diese Kupfer zu dem andern Theil gehoren, so ist es doch rathsamer solche dem ersten Theil anzufügen; damit auf solche Weise beyde Theile von gleicher Dicke ſeyen, und der Leser bey Lesung des zweiten die Kupfer bequemer vor sich haben, und nicht bestændig herum blættern moge.*

Digitized by Google

Digitized by Google

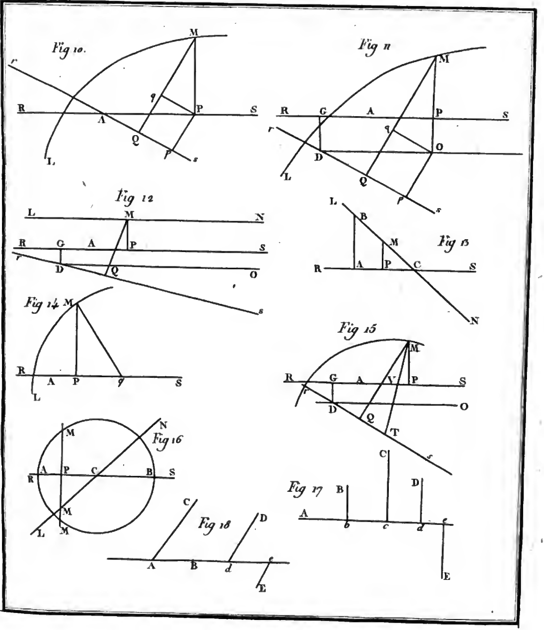
Planche 1




Digitized by Google

Digitized by Google

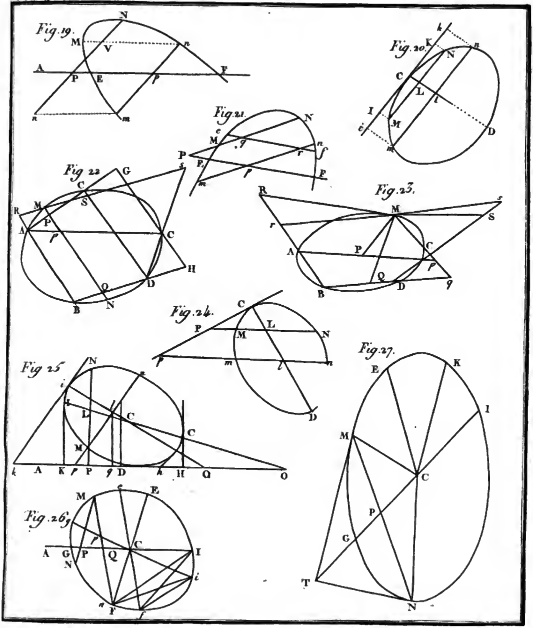
Planche.2.




Digitized by Google

Digitized by Google

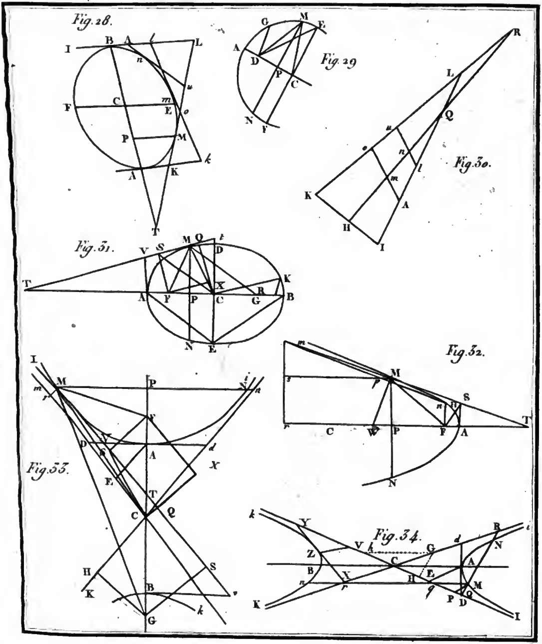
Planche 3.




Digitized by Google

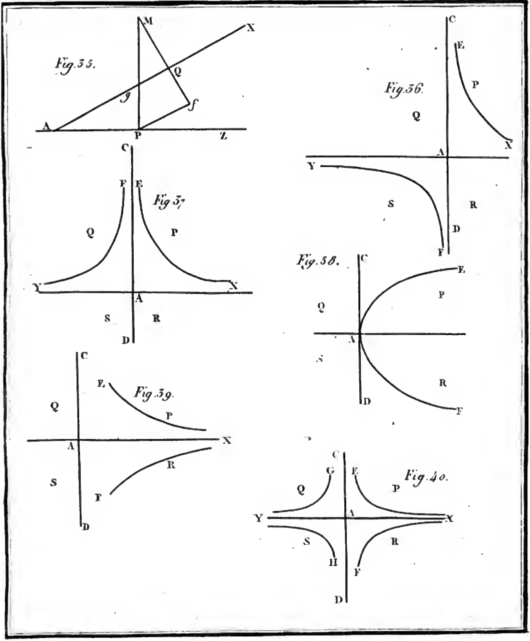
400

Planche. 4.



Digitized by Google

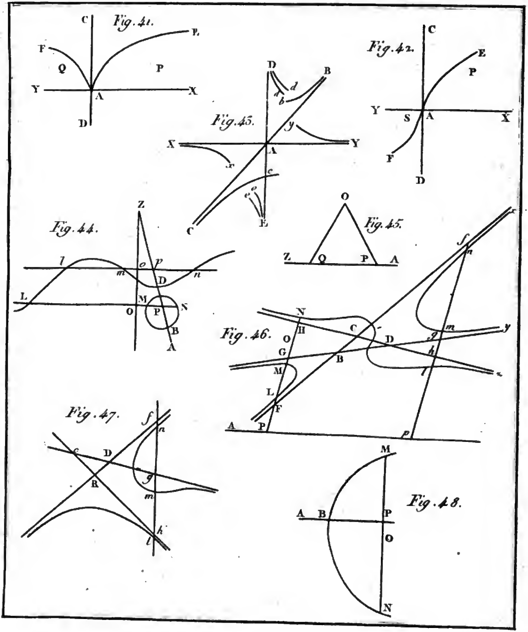
Planche 5.




Digitized by Google

Digitized by Google

Planche .6.




Digitized by Google

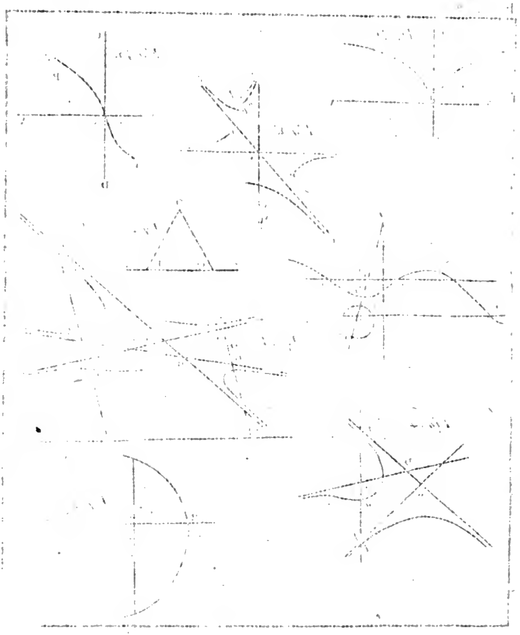
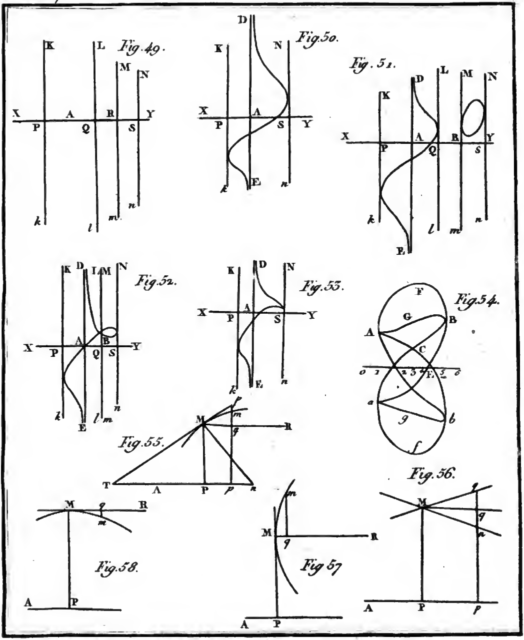
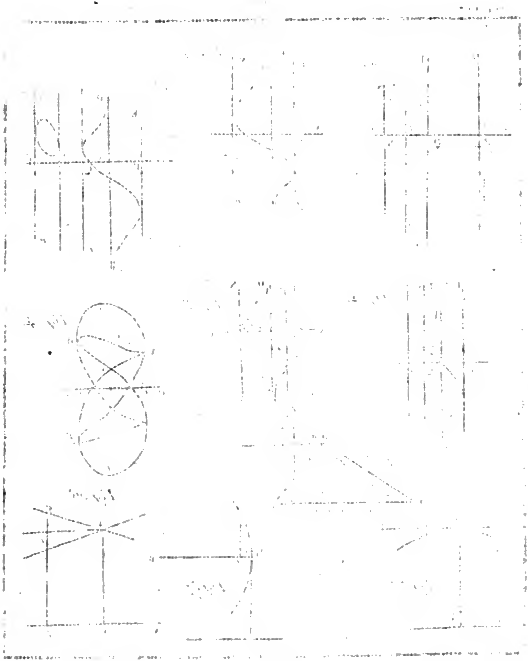


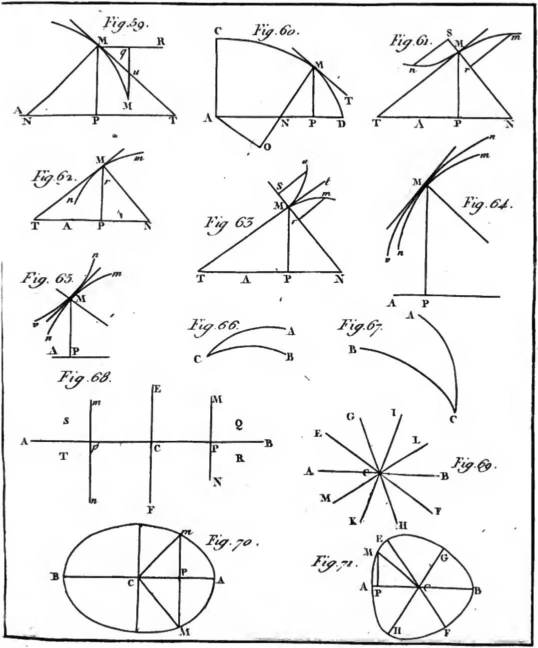
Planche 7

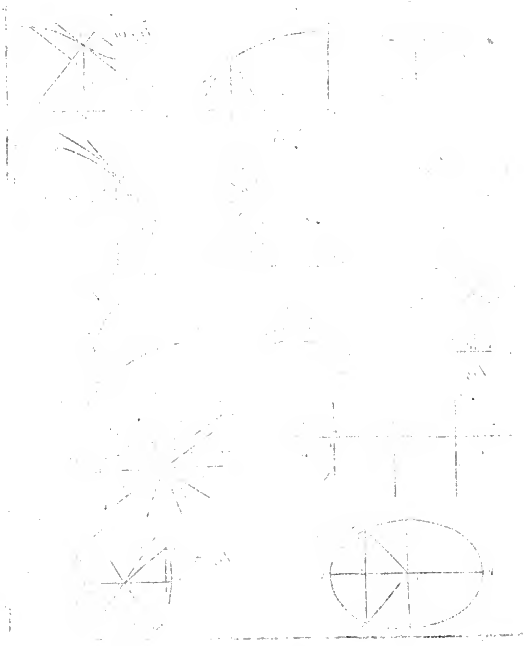



Digitized by Google

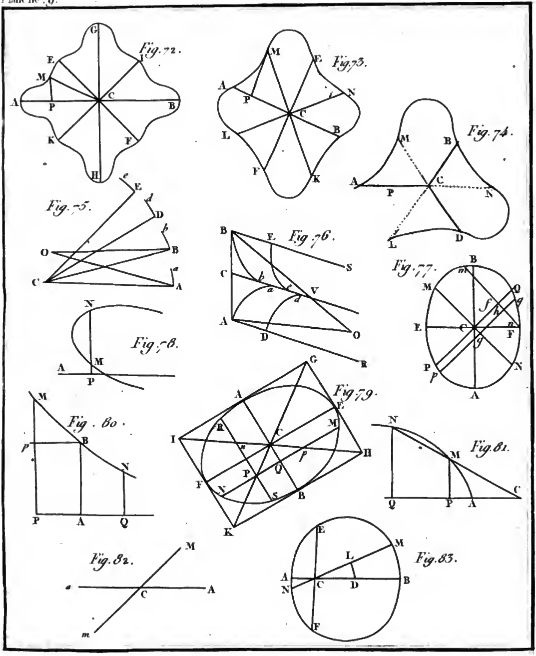


Digitized by Google


Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig 63
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.

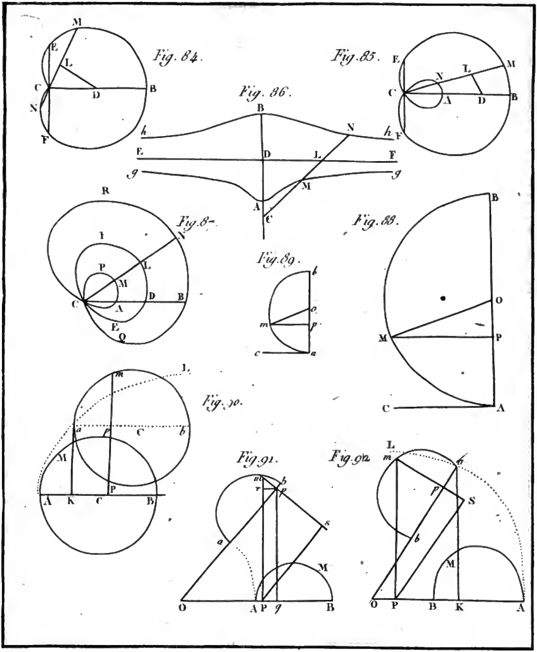


Digitized by Google




Digitized by Google

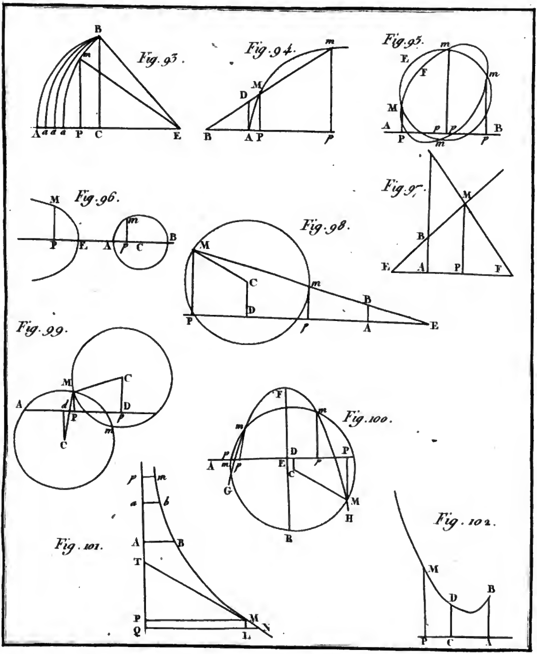
Digitized by Google



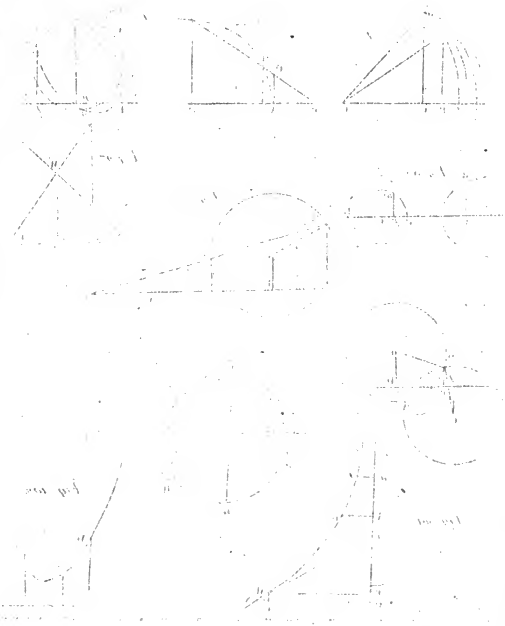

Digitized by Google

Digitized by Google

Planche. II.




Digitized by Google



Digitized by Google

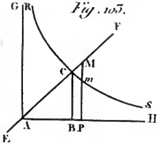


Fig. 103.

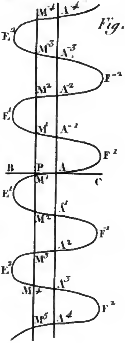


Fig. 104.

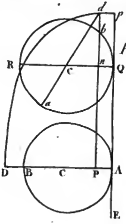


Fig. 105.

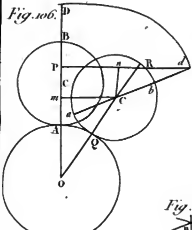


Fig. 106.

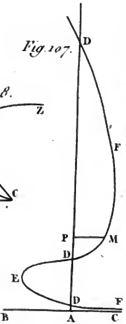


Fig. 107.

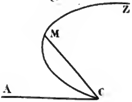


Fig. 108.

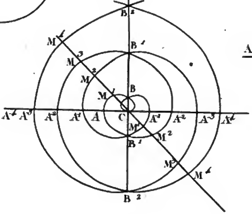
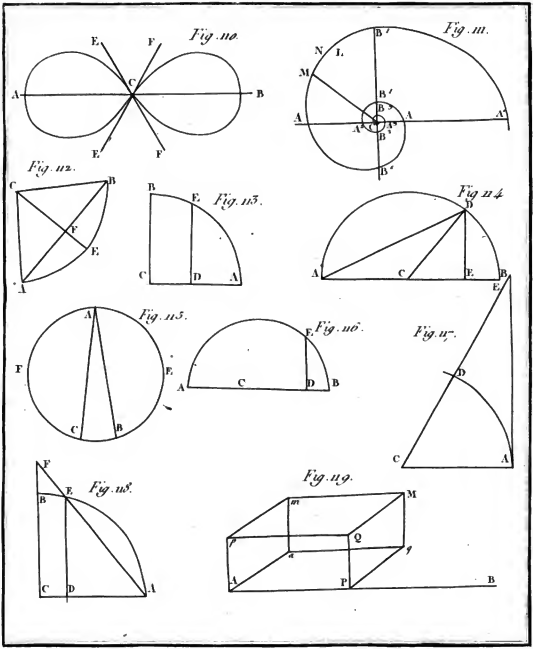


Fig. 109.

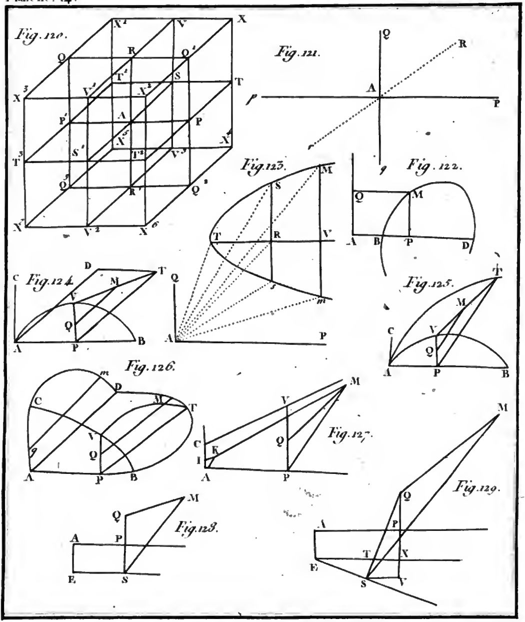
Digitized by Google


Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.

Digitized by Google

5.4.305

Planche. 14.

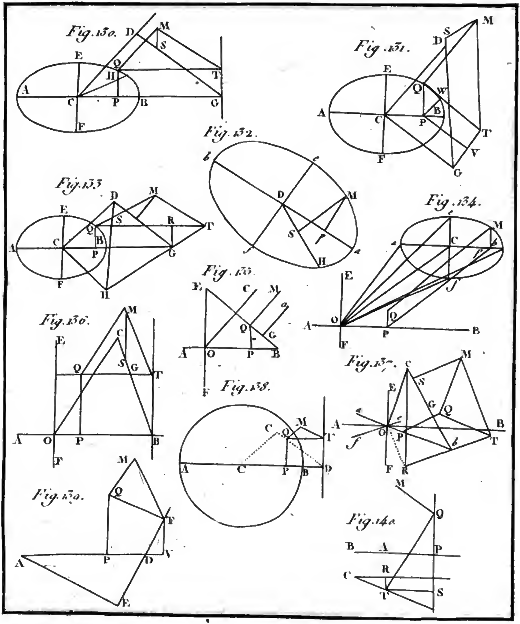



Digitized by Google

Digitized by Google

Planche. 15.

5.41305

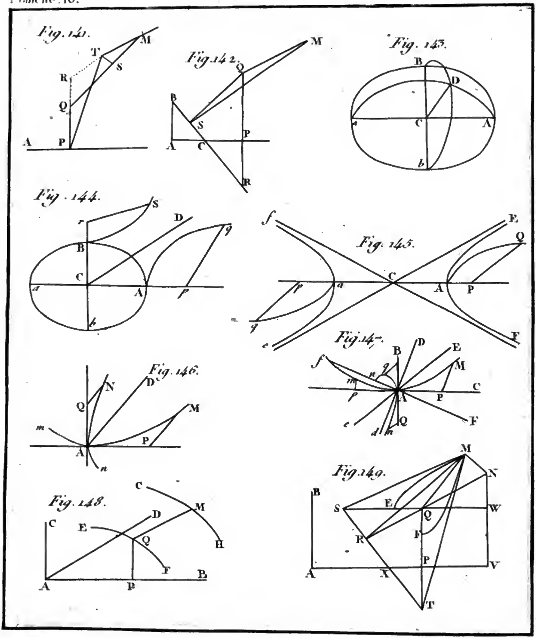



Digitized by Google

Digitized by Google

5.4.305

Planche. 16.




Digitized by Google

5 · 4 · 305

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

66 Digitized by Google